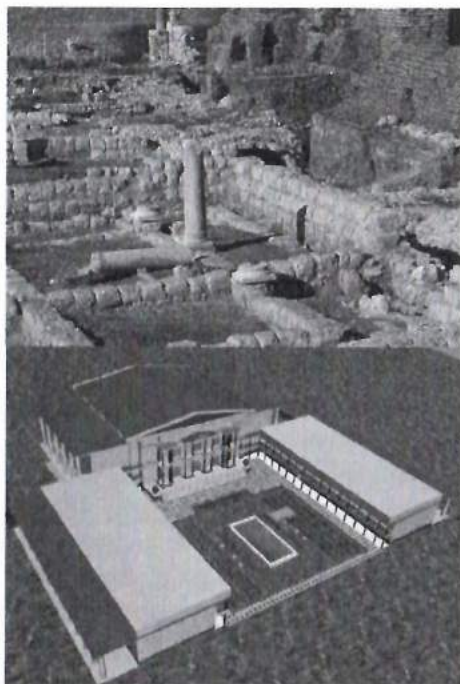


Գլուխ 4. ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ՃԱՐՏԱՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՈՃԵՐԻ ԳԵՂԱԳԻՏԱԿԱՆ ԳՐԱՎՉՈՒԹՅՈՒՆԸ

Մեթոդը ջահ է մթության մեջ իր ու-
ղին հարթող ճանփորդի ձեռքին:
Ֆրենսիս Բեկոն



Ալեքսանդրիայի

ավերակները և գրադարանի հատակագիծը: Ալեքսանդրիան հունական աշխարհի
ամենամեծ քաղաքն էր և մշակութային և գիտական կենտրոնը: Հիմնադրել է Ալեքսանդր
Մակեդոնացին մ.թ.ա. 332 թ.: Այստեղ են սովորել և արարել Էվկլիդեսը, Արքիմեդը ...

Մեթոդ հունարեն նշանակում է հետազոտման կամ ճանաչողության ուղի, ճանապարհ: Այն որոշակի նպատակի հասնելու կամ խնդրի լուծման համար անհրաժեշտ քայլերի, գործողությունների համակարգված համախմբություն է: Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում կիրառվում են ինչպես գիտական իմացության մեթոդները, այնպես էլ ուսուցման առանձնահատուկ մեթոդներ: Այդ մեթոդներից յուրաքանչյուրը ունի իր գեղագիտական գրավչությունը, և կախված նրանից, թե ինչպիսի մեթոդ ենք կիրառում մաթեմատիկական նյութի շարադրման կամ կիրառական ոլորտի հետ նրա շաղկապման համար, ստանում ենք մաթեմատիկական կրթության յուրահատուկ ճարտարապետությունը, նրա ոճը՝ գեղագիտական իր գրավչությամբ, գեղագիտական արժեքների ձևավորման առանձնահատկություններով:



Նկկոլայ Գե

Ինչ է ճշմարտությունը, 1890

§1. ԻՄԱՅՈՒԹՅԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐԸ ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԳԵՂԵՑԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Մեթոդը իմացությունը վերածում է կազմակերպված գործունեության, հետազոտության գործընթացը ազատում պատահականություններից:

Ռենե Դեկարտ

Իմացության մեթոդները մարդու, հասարակության, բնության և աշխարհի ճանաչողության ընդհանրական մեթոդներ են, որոնց գեղագիտական գրավչությունը, առաջին հերթին, դրսևորվում է գիտական գեղեցիկի այնպիսի հատկանիշների մեջ, ինչպիսիք են տրամաբանական խստությունը, հստակությունը, բազմազանությունների միասնականությունը և ընդհանրականությունը: Մաթեմատիկայում և նրա ուսուցման գործընթացում այդ մեթոդները ավելի հստակ տեսք են ստանում, և դրանց կիրառության արդյունքում դրսևորվող գեղագիտական օրինաչափություններին այստեղ ավելանում է պարզությունը, կարգը և գիտական գեղեցիկին բնորոշ այլ հատկանիշներ, որոնք այս մեթոդներին հաղորդում են գեղական մեծ գրավչություն:

1. Իմացության հմայիրիկ մեթոդները

Իմացության հմայիրիկ կամ փորձնական (հմայիրիկոս հունարեն նշանակում է փորձ) մեթոդները՝ փորձը, դիտումը, չափումը, հաշվումը, նկարագրությունը, մեծ դեր են խաղում ինչպես բնության ճանաչողության, այնպես էլ բնական գիտություններում կատարվող հետազոտությունների իրականացման մեջ: Եվ թեև դրանք բնութագրական չեն մաթեմատիկայի համար, սակայն մեծ դեր են խաղում նաև մաթեմատիկական գործունեության մեջ:

Իսկապես, մաթեմատիկական գիտելիքը՝ հասկացությունը, թեորեմը, նրա ապացուցումը, պատրաստի վիճակում չեն տրվում հետազոտողին. դրանց ստացման ճանապարհը շատ բարդ է: Հաճախ թեորեմը, նրա ապացուցումը իր գաղտնիքը երևան է հանում միայն սերունդների համառ աշխատանքից հետո: Եվ դրան հասնելու ճանապարհը ներառում է բազմաթիվ մասնավոր դեպքերի, օրինակների քննարկումներ և դիտար-

կումներ, որոնց արդյունքում էլ հետագոտողի մոտ ձևավորվում են հասկացության, թեորեմի ձևակերպման և ապացուցման ճանապարհի կռահման, վարկածների առաջադրման ինտուիտիվ նախադրյալներ:

Մաթեմատիկական գործունեության մեջ էմպիրիկ մեթոդի նման մասնակցությունը ավելի հատկանշական է մաթեմատիկայի զարգացման սկզբնական շրջանին, որտեղ չափումը, դիտումը, փորձը ունեցել են շատ մեծ դեր: Այն դրսևորվում է նաև մաթեմատիկայում կատարվող հետազա և ժամանակակից հետազոտություններում:

Էմպիրիկ մեթոդը կարևոր նշանակություն ունի նաև հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում: Այդ մեթոդի դերը առանձնապես մեծանում է մաթեմատիկական կրթության գեղագիտական ներուժի բացահայտման և դրսևորման տեսակետից, քանի որ գեղագիտության մեջ իմացության էմպիրիկ մեթոդը խաղում է հիմնարար դեր: Եվ մաթեմատիկայի ուսուցման նպատակների, խնդիրների, գործառույթների իրականացման, մասնավորապես՝ մաթեմատիկական գեղեցիկի բացահայտման և ուսուցման գործընթացի միջոցով գեղագիտական արժեքների ձևավորման տեսակետից կարևոր է ոչ թե մաթեմատիկական գիտելիքի ուսուցումը պատրաստի, վերջնական վիճակում մատուցելը, այլ նրա ուսուցման նախնական փուլում էմպիրիկ մեթոդի կիրառությունը: Նման մոտեցումը նպաստում է նաև մաթեմատիկայի վերացական նյութի նկատմամբ հետաքրքրությունների առաջացմանը, բարձրացնում է սովորողների ակտիվությունը և այլն:

Հասկանալի է, որ մաթեմատիկական գեղեցիկի այնպիսի հատկանիշներ, ինչպիսիք տրամաբանական խստությունն է, հստակությունը, ընդհանրականությունը, չեն կարող դրսևորվել էմպիրիկ մեթոդի կիրառման ժամանակ, բայց էմպիրիկ ուսուցումը ստեղծում է նախադրյալներ այդ հատկանիշների երևան գալու համար:

Էմպիրիկ մեթոդը վարկածների ստացման և առաջադրման հիանալի միջոց է և սովորողի մոտ առաջացնում է «արդյո՞ք ճշմարիտ է» ընդհանուր հարցադրման պատասխանը գտնելու մղում. ինչը թեև ստուգված է էմպիրիկ մեթոդով և դեռևս չի ապացուցված, բայց հավատ է ներշնչում դրական պատասխանի նկատմամբ (իսկ բուն ապացուցումը կատարվում է այլ մեթոդներով): Այդ հավատը և մղումը ծնում են հետաքրքրություն, սովորողին նպատակաուղղում հետագա մաթեմատիկական գործունեության, իսկ հարցադրման առաջացումը և պատասխանի գտնելը ուղեկց-

վում են նաև գեղագիտական բավարարվածության տարրերով և հուզական ապրումներով:

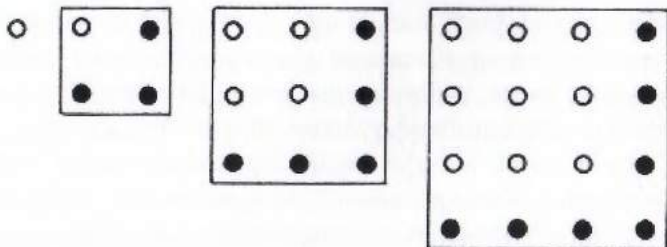
Ցուցադրենք էմպիրիկ մեթոդի կիրառման միջոցով նշված խնդիրների իրականացման, մասնավորապես՝ մաթեմատիկայի գեղագիտական ներուժի, նրա գեղագիտական գրավչության բացահայտման հնարավորությունները կոնկրետ օրինակների դիտարկմամբ:

Հարգելի Վահրամը Պյութագորասի թեորեմը ուսուցանելուց առաջ մեզ տանում էր դպրոցի հողամաս, առաջարկում էր չափել նրա ուղղանկյունաձև պատի երկու կողմերը, որոնց երկարությունները ընտրում, չափում և արդյունքները մեզ էին հայտնում երկու աշակերտներ: Իսկ ինքը՝ հարգելի Վահրամը, խորհրդավոր ժպիտը դեմիքն,, հայտնում էր աշակերտների վերջնական դիրքերի միջև եղած հեռավորությունը: Այդ հեռավորությունը չափում էինք նաև մենք ու ստանում նույն արդյունքը: Փորձը կրկնվում էր մի քանի անգամ՝ ուղղանկյան կողմերի երկարությունները փոփոխելով: Բայց մեր ուսուցչի տված պատասխանները միշտ անսխալ էին լինում: Դրանից հետո հարգելի Վահրամը մեզ տանում էր դասարան և գրատախտակի վրա բացում իր գաղտնիքը՝ Պյութագորասի թեորեմը. ուղղանկյուն եռանկյան էջերի քառակուսիների գումարը հավասար է ներքնաձիգի քառակուսուն: Մեր չափումների արդյունքները հաստատում էին Պյութագորասի այս վարկածը: Իսկ մեր կատարած աշխատանքը և հարգելի Վահրամի ճիշտ կոախումները ավելի նշանակալից էին դարձնում այն՝ նրան հաղորդելով որոշակի գրավչություն: «Հը, ուզո՞ւմ եք իմանալ ապացուցումը», -հարցնում էր հարգելի Վահրամը: Բհարկե ուզում էինք, որովհետև թեորեմի հանդեպ հետաքրքրությունը ստացել էր մի նոր ու գրավիչ երանգ:

Իսկ ինքը՝ Պյութագորասը և պյութագորասականները էմպիրիկ մեթոդը զուգակցում էին պատկերումների հետ՝ բնական թվերի զանազան հատկություններ հայտնաբերելու համար: Օրինակ, առաջին հաջորդական կենտ թվերի գումարներն ստանալու համար, նրանք կառուցում էին այսպիսի պատկերներ, որոնք ցույց էին տալիս, որ

$$1 + 3 = 2^2, 1 + 3 + 7 = 3^2, 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

և այլն: Այս հաշվումներից ելնելով, նրանք եզրակացնում էին, որ



առաջին n կենտ թվերի գումարը հավասար է n -ի քառակուսուն՝

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Անշուշտ, պյութագորյան այս ապացուցումը հեռու է մաթեմատիկական խստությունից. կիրառված էմպիրիկ մեթոդը նման խստություն չի էլ կարող ապահովել: Բայց և չի կարող հիացմունք չպատճառել կիրառված մոտեցման հնարամտությունը, ինչը հնարավորություն է տվել առաջ քաշելու հրաշալի վարկածը, իսկ դրա ապացուցման խստության ապահովումը վեր էր այդ ժամանակաշրջանի մաթեմատիկայի հնարավորություններից:

Հանրակրթական դպրոցում էմպիրիկ մեթոդի կիրառման անհրաժեշտությունը պայմանավորված է սովորողի տարիքային առանձնահատկություններով. ինչքան փոքր է սովորողը, այնքան մեծ է այդ մեթոդի կիրառման անհրաժեշտությունը: Սակայն ուսուցանվող մաթեմատիկական վերացական նյութի ընկալման դժվարությունը հաղթահարելու համար անհրաժեշտ է էմպիրիկ մեթոդը լայնորեն կիրառել ուսուցման բոլոր փուլերում:

Այսպես, օրինակ, միջին դպրոցի հանրահաշվի ուսուցման կարևորագույն խնդիր է սովորողների կողմից հանրահաշվական լեզվի՝ որպես բնության, աշխարհի ուսումնասիրության համար անհրաժեշտ միջոցի, գիտակցության ձևավորումը ու նրա տիրապետումը: Հանրահաշվի և, ընդհանրապես, մաթեմատիկայի լեզուն մտածողության ձև է, նրա բարձր մակարդակը, ինչը ճանապարհ է հարթում դեպի աշխարհընկալում և ինտելեկտուալ զարգացում և մնում է տիրապետողին՝ որպես նրա մտավոր մշակույթի մշտական ու անօտարելի մաս և հարստություն: Մինչդեռ հանրահաշվի և մաթեմատիկայի դասագրքերում այս խնդիրը հաճախ փոխարինվում է սովորողների կողմից լավ չգիտակցված հասկացությունների հետ կատարվող գործողությունների վերաբերյալ մեխանիկա-

կան վարժանքներով, ինչը ժամանակի ընթացքում մոռացվում է և, մանավանդ, ոչինչ չի տալիս ապագա քաղաքացուն, ով հետագայում իր մասնագիտական գործունեության մեջ չի առնչվում մաթեմատիկայի հետ:

Ելնելով այս մոտեցումներից՝ մենք [9]-[11] դասագրքերը նպատակաուղղել ենք առաջին հերթին հանրահաշվական լեզվի ձևավորմանը, որի իրականացման համար լայնորեն ներգրավվում է էմպիրիկ մեթոդը: Այն առաջին հերթին կիրառվում է մաթեմատիկական վերացական հասկացությունները ընկալելի դարձնելու, նրանց ներմուծման անհրաժեշտությունը հիմնավորելու համար: Բերենք այս տեսակետից կարևոր երկու օրինակ:

ա. Հանրահաշվի, նրա լեզվամտածողության հիմքը անհայտն է, փոփոխականը: Նրա ընկալումից է կախված հանրահաշվական լեզվի յուրացման հաջողությունը: Դասընթացում անհայտի գաղափարը ներմուծելու համար դիտարկվում են մայրենի լեզվում նրա օգտագործման օրինակներ: Հանրահայտ մարդկանց, անձնանունների, գոյականների և դերանունների օրինակների վրա ցուցադրվում են մայրենի լեզվի հաստատունները և փոփոխականները: Նշենք, որ էմպիրիկ ուսուցման այս եղանակը, բացի նյութը ընկալելի դարձնելուց և նրա ուսուցման արդյունավետությունը բարձրացնելուց, ունի նաև գեղագիտականի դրսևորման լրացուցիչ ներուժ. արվեստի, մշակույթի նշանավոր գործիչների մասին նյութերի ներգրավումը ուսուցումը դարձնում է ավելի գրավիչ:

Մաթեմատիկայի գեղագիտության պարզության և հստակության հատկանիշներ առանձնապես ցայտուն են դրսևորվում անհայտի կամ փոփոխականի ներմուծման մոտիվացիայի ընթացքում. այն, որ ես հաշվել եմ, գիտեմ իմ գրպանում եղած դրամի քանակությունը, թվաբանություն է, թվաբանական գործողությունների արդյունք, իսկ այն, որ ես գիտեմ նաև ցանկացած մարդու մոտ եղած դրամի քանակությունը (ես այն նշանակում եմ x -ով)՝ արդեն հանրահաշիվ է: Ես գիտեմ նաև որոշ զումար ստանալուց հետո մարդու մոտ առաջացած դրամի քանակությունը՝ $x + y$, որոշ զումար ծախսելուց հետո մնացած զումարի քանակությունը՝ $x - y$ և այլն: Եվ սա ոչ թե աճպարարություն է, այլ բնության ուսումնասիրության, հետազոտության հզոր միջոց՝ հանրահաշվի լեզուն: Իսկ հանրահաշվի լեզվի ուսուցման ուղեկցումը նրա գործողությունների մոդելների էմպիրիկ ուսուցմամբ նրա արդյունավետության բարձրացման կարևոր միջոց է, ինչը իրագործվում է նշված դասընթացում: Այստեղ էմպիրիկ ուսուցումն ունի գեղագիտականի դրսևորման հիանալի հնարավորություններ՝

ի դեմս մաթեմատիկական գեղեցիկի կիրառելիության հատկանիշի: Հանրահաշվական գործողություններից յուրաքանչյուրը ունի կիրառական մի քանի մոդել, որոնց ուսուցումը Հայես մեծացնում է նաև տեսական նյութի նկատմամբ հետաքրքրությունը: Այդ մոդելները մենք լայնորեն ներգրավել ենք [9]-[11] դասագրքերում:

բ. Հանրակրթական դպրոցում իմ ուսանելու տարիներին ֆունկցիայի ընդհանուր հասկացությունը չէր ուսումնասիրվում: Մենք գիտեինք գծային, քառակուսային, եռանկյունաչափական և այլ ֆունկցիաներ, բայց «ֆունկցիա» հասկացությունը չէինք ուսումնասիրել: Հարկ է նշել, որ ֆունկցիաների կոնկրետ օրինակները այստեղ բավարար չեն այդ չափազանց բարդ և ընդհանրական հասկացության ընկալման համար: Եվ ես երկար տանջվում էի այն բանից հետո, երբ առաջին կուրսում մաթանալիզի մեր դասախոսը գրատախտակին գծեց կոորդինատական համակարգը, մի կոր գիծ ու դրա վրա գրելով $y = f(x)$, որպես ինքնին հասկանալի մի բան, անփույթ ասաց. «դիցուք ունենք իզրեկը հավասար է էֆ իքս ֆունկցիան»: Ես միայն տարիներ հետո խորությամբ հասկացա ֆունկցիայի գաղափարը, նրա նշանակությունը: Իսկ հանրակրթական դպրոցի աշակերտը: [7] աշխատանքում մենք հանգամանորեն վերլուծել ենք ֆունկցիայի գաղափարի ներմուծման հետ կապված մեթոդական խնդիրները: Այստեղ նշենք միայն, որ այդ թեմայի ուսուցման հաջողությունը պայմանավորված է էմպիրիկ մեթոդի համակողմանի և լայն կիրառման հետ: Իսկ թեմայի էմպիրիկ ուսուցման ընթացքի մեջ մշակույթի գործիչների կյանքից, Գինեսի գրքից, մարզական միջոցառումներից վերցրած բազմազան տեղեկությունների ներառումով ապահովվում է ուսուցման նկատմամբ հետաքրքրությունը և նրա գեղագիտական գրավչությունը:

Ուսուցման էմպիրիկ մեթոդների կիրառումը տարբեր կերպ է անդրադառնում գեղագիտական տարբեր կատեգորիաների ձևավորման խնդրի վրա: Դիտարկենք, օրինակ, գեղագիտական հարաբերության խնդիրը էմպիրիկ մեթոդով ուսուցման գործընթացում:

Էմպիրիկ մեթոդների կիրառման ընթացքում շնորհիվ մաթեմատիկական նյութի ուսումնասիրության մեջ դիտողական, առօրեական բնույթի օբյեկտների կիրառման, հնարավոր է դառնում աշակերտների ավելի լայն շրջանակ ընդգրկել ուսուցիչ-ուսումնական նյութ-աշակերտ հարաբերության մեջ, իսկ այդ օբյեկտների կիրառական հնարավորությունները թույլ են տալիս նշված հարաբերությանը հաղորդել գեղագիտական երանգ:

Գեղագիտական հարաբերություններին նվիրված բաժնում մենք նշեցինք ուսուցչի դերը նման հարաբերությունների հաստատման գործում՝ նմանեցնելով այն ռեժիսորի դերին, իսկ աշակերտների դերը նմանեցրինք հանդիսատեսի և դերասանների դերերին՝ միաժամանակ: Լավ դասներկայացման մեջ չի կարող լինել աշակերտ, որը դեր չունենա: Հասկանալի է, որ միևնույն դերը, ասենք՝ թեորեմի դժվար ապացուցումը, չի կարելի հանձնարարել մաթեմատիկայից թույլ աշակերտի: Բայց ահա էմպիրիկ ուսուցումը թույլ է տալիս հեշտությամբ գտնել դեր նաև այդ թույլ աշակերտի համար, նրան ներգրավել դասի մեջ, դասը նրա համար դարձնել ոչ թե պարտադրանք, այլ ստեղծագործական գործընթաց: Պատահական չէ, որ էմպիրիկ ուսուցմամբ տարվող դասը՝ որպես ուսուցիչ-ուսումնական նյութ-աշակերտ եռակողմ հարաբերություն, ավելի մեծ շանսեր ունի դառնալու ներդաշնակ, քան չեզոք կամ հակասական: Բնականաբար, այդ շանսերը զգալիորեն մեծանում են, եթե հարաբերությունը ընդունում է գեղագիտական երանգներ: Եվ նորից կրկնենք, որ նման ընթացքը հիմնականում պայմանավորված է ուսուցչի գործոնով:

2. Վերլուծությունը և համադրությունը

Վերլուծությունը և համադրությունը՝ համեմատման, անալոգիայի, ընդհանրացման, մասնավորեցման, վերացարկման և կոնկրետացման հետ միասին կազմում են իմացության հաջորդ՝ տրամաբանական մեթոդների խումբը:

Վերլուծությունը հետազոտության այնպիսի մեթոդ է, տրամաբանական հնարք, որը ենթադրում է ուսումնասիրվող առարկան կամ երևույթը տրոհել մասերի և նրա ուսումնասիրությունը հանգեցնել այդ մասերի ուսումնասիրության: Տրոհումը կարող է լինել ինչպես առարկայական, երբ, օրինակ, ավտովերանորոգողը մեքենայի շարժիչի անսարքությունը գտնելու և վերացնելու համար այն տրոհում է մասերի, այնպես էլ մտային, երբ ուսուցիչը դասի մեջ ամփոփված նյութը տրոհում է մասերի: Համադրությունը ենթադրում է մասերը միավորել ամբողջի մեջ և նրանց հատկությունները տեսնել ամբողջի հատկությունների լույսի ներքո:

Վերլուծությունը ամբողջից, այսինքն՝ ողջ օբյեկտից, բարդից, նրա մասերի, այսինքն՝ ավելի պարզ օբյեկտների առանձնացումը և ուսումնասիրությունը բարդը պարզին հանգեցնելու լավագույն օրինակ է: Համադրու-

թյան ընթացքում մասերը միավորվում են՝ կազմելով մեկ ամբողջություն: Սա էլ գիտական գեղեցիկի բազմազանությունների միասնության հրաշալի դրսևորում է: Հետևաբար, գիտական գեղեցիկի՝ բարդը պարզին հանգեցնելու և բազմազանությունների միասնության հատկանիշները ընկած են վերլուծության և համադրության մեթոդների հիմքում և ապահովում են այդ մեթոդների գեղագիտական գրավչությունը:

Միևնույն ժամանակ, եթե նկատի ունենանք, որ առարկայի, երևույթի մասերի համեմատությունը, համաձայնեցվածությունը և դիտարկումը ամբողջի, ընդհանուրի դիրքերից, դրանց միավորումը նրա ներդաշնակության բացահայտմանն ուղղված գործողություններ են, ապա վերլուծությունը և համադրությունը, որպես նմանատիպ գործողություններ իրականացնող գործընթացներ, միտված են դեպի ներդաշնակություն և, ուրեմն, դեպի գեղեցիկը:

Վերլուծության և համադրության մեթոդների գեղագիտական գրավչությունը արտահայտվում է նաև գիտական գեղեցիկի մի շարք սուբյեկտիվ հատկանիշների դրսևորմամբ: Յուրաքանչյուր վերլուծություն ստեղծագործական աշխատանք է, ինտելեկտուալ որոնում, որն ուղեկցվում է գտնելու և հայտնագործելու որոշակի տարրերով: Այստեղ կարող են դրսևորվել անկանխատեսելի ու անսպասելի, հեղափոխական քայլը, մեծ ջանքեր առարկայի, երևույթի էությունը հասկանալու համար: Վերջինս ավելի ցայտուն է դրսևորվում համարդրության ընթացքում:

Համադրությունը նույնպես ինտելեկտուալ որոնման, գտնելու, հայտնագործելու, ստեղծագործելու գործընթաց է, ինչը հաճախ ուղեկցվում է անկանխատեսելիության, անսպասելիության, ոչ ակնհայտ ճշմարտության իմացության տարրերով: Ասվածը խոսում է գեղեցիկի ձևավորման մեծ ներուժի մասին, որն առկա է վերլուծության և համադրման մեթոդներում, ինչը կարելի է ի հայտ բերել և օգտագործել հետազոտությունները և ուսուցումը այդ մեթոդներով իրականացնելիս:

Սովորաբար իմացության գործընթացում վերլուծությունը և համադրությունը հանդես են գալիս միասնաբար և լրացնում են միմյանց:

Մաթեմատիկայում հաճախ վերլուծության միջոցով թեորեմի ապացուցումը ստանալու համար անհրաժեշտ բանաձևերի շղթան կամ հաջորդականությունը կառուցվում է հակադիր ուղղությամբ՝ եզրակացությունից դեպի պայման. ենթադրվում է, որ տրված է եզրակացությունը, և տրամաբանական քայլերի միջոցով հանգում են պայմանին կամ ճշմար-

տության: Որից հետո, կիրառելով համադրության մեթոդը, կառուցում են ապացուցման ուղիղ շղթան:

Օրինակ, դիցուք ուզում ենք ապացուցել թվաբանական և երկրաչափական միջինների միջև եղած կապը. կամայական ոչ բացասական x և y թվերի համար՝

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}:$$

Վերլուծությունը՝ մտածողության ընթացքը եզրակացությունից դեպի պայման կամ թեզիսից դեպի նախադրյալ: Կամայական ոչ բացասական x և y թվերի համար ունենք՝

$$\begin{aligned}\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} &\rightarrow 2\sqrt{xy} \leq x+y \rightarrow (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{xy} + (\sqrt{y})^2 \geq 0 \rightarrow \\ &\rightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0:\end{aligned}$$

Նկատենք, որ վերջին բանաձևը ոչ խիստ անհավասարություն կամ ճշմարտություն է:

Համադրությունը՝ մտածողության ընթացքը պայմանից դեպի եզրակացություն.

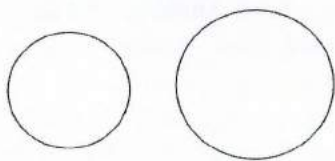
$$\begin{aligned}(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 &\rightarrow (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{xy} + (\sqrt{x})^2 \geq 0 \rightarrow 2\sqrt{xy} \leq x+y \rightarrow \\ &\rightarrow \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}:\end{aligned}$$

Քանի որ առաջին բանաձևը ճշմարտություն է, ապա վերջին՝ ապացուցվող բանաձևը նույնպես ճշմարտություն է:

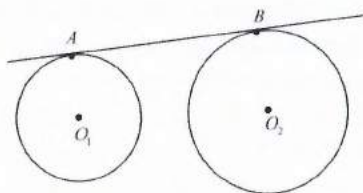
Այստեղ վերլուծությունը մեզ հնարավորություն տվեց բացահայտել ապացուցվելիք բանաձևի կապը այլ բանաձևերի և ճշմարտությունների հետ, որոնք էական դեր ունեն նրա ապացույցի մեջ: Համադրությունը հնարավորություն տվեց այդ բանաձևերի միջոցով կառուցել ապացուցվելիք բանաձևի ապացուցումը: Այսպիսով, տրված մեթոդների կիրառման արդյունքում մենք բացահայտեցինք ապացուցման ներքին մեխանիզմը, ինչը իր մեջ պարունակում է գեղագիտական գրավչություն, քանի որ նրանում առկա են կարգը, հստակությունը, պարզությունը և տրամաբանական խստությունը: Բերենք մեկ այլ օրինակ. լուծենք հետևյալ խնդիրը:

Կարկինի և քանոնի միջոցով տանել տրված երկու շրջանագծերին ընդհանուր շոշափող:

Խնդրի լուծումը սկսենք վերլուծությունից: Խնդրում, նշված շրջանագծերը պատկերենք 1 գծագրով: Այնուհետև գտնենք շրջանագծերի կենտրոնները (բնական է առաջին հերթին գտնել դրանք) և դրանց տանք անվանումներ՝ O_1 և O_2 :



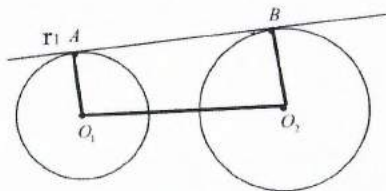
Գծ. 1



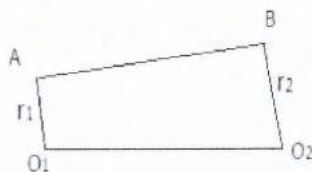
Գծ. 2

Ենթադրենք, թե կառուցված է նաև որոնելի շոշափողը, որը տրված շրջանագծերի հետ հատվում է A և B կետերում: Համադրելով այս երկու վերլուծությունների արդյունքները, կստանանք 2 գծագիրը:

Շարունակենք մեր վերլուծությունը: Երկրաչափական մոտեցումը առաջին հերթին պատկերային մոտեցում է. հաջորդաբար միացնենք 2 գծագրում առկա կետերը և տեսնենք, թե ինչ պատկեր է առաջանում: Կստանանք 3 գծագիրը և նրանում՝ ABO_2O_1 քառանկյունը: Ընդ որում դժվար չէ նկատել, որ այդ քառանկյան AO_1 և BO_2 կողմերը ուղղահայց են նրա AB կողմին: Այստեղ արդեն կարող ենք կատարել մեր առաջին կարևոր եզրակացությունը. խնդիրը լուծված կլինի, եթե կարողանանք կառուցել նշված քառանկյունը: Այդ քառանկյան կառուցման խնդիրը ավելի ակնառու կդառնա, եթե այն առանձնացնենք 3 գծագրից և պատկերենք մեկուսի՝ 4 գծագրով: Ի՞նչ կարելի է ասել դիտարկվող քառանկյան մասին. դրա ո՞ր տվյալներն ունենք:



Գծ. 3

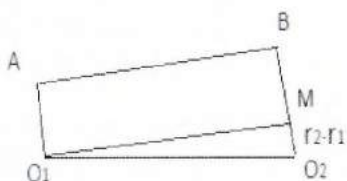


Գծ. 4

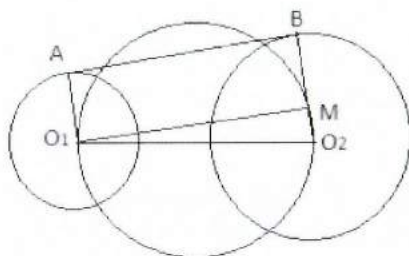
Նախ, պարզ է, որ A և B անկյունները ուղիղ են, իսկ AO_1 և BO_2 հատվածները համապատասխանաբար O_1 և O_2 շրջանագծերի

շառավիղներն են, որոնք մենք ունենք (գծագրում դրանք նշված են r_1 և r_2 տառերով): Մենք ունենք նաև O_1O_2 հատվածի երկարությունը:

Համադրելով կատարված վերլուծության այս արդյունքերը, մենք տեսնում ենք, որ ABO_2O_1 քառանկյան համար տրված են հինգ տվյալներ, ինչը լիովին բավարար է այն կառուցելու համար: Բայց ինչպե՞ս կառուցենք այն այդ տվյալների միջոցով: Այս հարցի պատասխանը անմիջականորեն չի



Գծ. 5



Գծ. 6

ստացվում. մենք ոչ մի կերպ չենք կարողանա այդ տվյալներով կառուցել պահանջվող քառանկյունը: Այդ պատճառով նորից դիմենք վերլուծության մեթոդին և աշխատենք կառուցել քառանկյան առանձին մասերը: Ամենաբնական մոտեցումը այստեղ O_1 կետից BO_2 -ին O_1M ուղղահայաց տանելն է: Այդ դեպքում մենք մեր քառանկյունը կտրոհենք երկու մասերի, որոնցից մեկը կլինի ուղղանկյուն ($ABMO_1$), մյուսը՝ ուղղանկյուն եռանկյուն (O_1O_2M): Ուսումնասիրենք այդ մասերը: Պարզության գեղագիտական հասկանիշը մեր երևակայությունը նախ տանում է դեպի $ABMO_1$ ուղղանկյուն, որն ավելի պարզ պատկեր է: Սակայն մեր մտածողությունն ասում է, որ նշված ուղղանկյունը մեզ ոչինչ տալ չի կարող, քանի որ նրա կողմերից երկուսը հայտնի են, իսկ մյուս երկուսը՝ անհայտ: Մեր երևակայության հաջորդ կանգառը O_1O_2M ուղղանկյուն եռանկյունն է: Մեզ հայտնի են նրա O_1O_2 ներքնաձիգը և O_2M էջը, որ հավասար է $r_2 - r_1$: Այդ երկու տվյալով արդեն մենք կարող ենք կառուցել O_1O_2M ուղղանկյուն եռանկյունը: Հասկանալի է, որ MO_1O_2 եռանկյունը կառուցելուց հետո ակնհայտ է դառնում արդեն ABO_2O_1 քառանկյան կառուցումը:

Իրականացված վերլուծությունների վերջնական համադրությունը մեզ թույլ է տալիս կատարել հետևյալ կառուցումը (տես գծ 6):

Վերցնենք տրված շրջանագծերը, գտնենք նրանց O_1 և O_2 կենտրոնները, կառուցենք O_1O_2 տրամագծով և O_2 կենտրոնով ու $r_2 - r_1$ շառավղով շրջանագծեր, որոնց հատման կետը կլինի M -ը: Այնուհետև O_2M հատվածը շարունակելով մինչև O_2 շրջանագծի հետ հատվելը, ստանանք B կետը, O_1 կետից տանենք O_2M ուղղին գուգահեռ, որը O_1 շրջանագծի հետ կհատվի երկու կետում, որոնցից այն, որը B -ի հետ միասին ընկած է O_1O_2 ուղղի միևնույն կողմում, նշանակենք A -ով: AB ուղիղն էլ կլինի որոնելին:

Մեզ մնում է նաև ապացուցել այս վերջին պնդումը, ինչը արդեն առանձնակի դժվարություն չի ներկայացնում, բայց ավելացնում է գեղագիտական տարրը՝ տրամաբանական խստության գեղագիտական հատկանիշի ներգրավման միջոցով:

Անշուշտ, հետագա վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ մենք դիտարկել ենք խնդրի միայն մեկ՝ արտաքին շոշափողներ տանելու դեպքը: Սակայն նման դատողություններով մենք կհանգենք նաև ներքին շոշափողների կառուցմանը:

Մենք կարող ենք նաև հետազոտել խնդրի լուծումը, պարզել, թե երբ այն լուծում կունենա և երբ չի ունենա, ինչի համար նորից անհրաժեշտ կլինի դիմել վերլուծության և համադրման մեթոդներին: Սակայն կատարվածը բավական է համոզվելու համար մաթեմատիկայում այդ մեթոդների կիրառման գեղագիտական գրավչությունը՝ ի դեմս գիտական գեղեցիկի վերևում նշված հատկանիշների կիրառման: Միևնույն ժամանակ, այդ մեթոդները և առանձնապես վերլուծությունը ինտելեկտուալ որոնման, գտնելու, հայտնագործելու հրաշալի դրսևորում է, ինչը ավելացնում է դրանցում գեղագիտական տարրը՝ գիտական գեղեցիկի համապատասխան հատկանիշների միջոցով:

Վերլուծության և համադրության մեթոդները հնարավորություն են ընձեռում խորությամբ ընկալելու մաթեմատիկական օբյեկտը: Միևնույն ժամանակ, նման ընկալումը ուղեկցվում է գիտական գեղեցիկի մի շարք օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշներով, ինչում համոզվեցինք դիտարկված օրինակում: Հետևաբար՝ այստեղ առկա ընկալումը նաև գեղագիտական ընկալում է, և մենք կարող ենք հավաստել, որ խնդրո առարկա մեթոդների կիրառումը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում ուղեկցվում է գեղագիտական ընկալմամբ: Դժվար չէ համոզվել, որ այդ մեթոդները նպաստում են նաև սովորողների գեղագիտական զարգացմանը և որոշ այլ գեղագիտական կատեգորիաների ձևավորմանը:

3. Ընդհանրացումը և մասնավորեցումը

Ընդհանրացումը մասնավորից ընդհանուրին, ընդհանուրից համընդհանուրին անցնելու մտային գործողություն է: Հակառակ գործողությունը՝ մտային անցումը ընդհանուրից մասնավորին, կոչվում է մասնավորեցում: Տվյալ օբյեկտից ընդհանրացման (մասնավորման) արդյունքում ստացված օբյեկտը կոչվում է տրվածի ընդհանրացում (մասնավորեցում):

Ընդհանրացումը և մասնավորեցումը կարող են վերաբերել ամենատարբեր օբյեկտների՝ հասկացությունների, դատողությունների, օրենքների, նորմերի և այլն:

Մաթեմատիկայում և նրա դպրոցական դասընթացում ընդհանրացումը և մասնավորեցումը ունեն ամենալայն մասնակցությունը. դրանք առկա են ինչպես մաթեմատիկական հասկացությունների, այնպես էլ թեորեմների, ապացուցումների, խնդիրների, դրանց լուծման և մաթեմատիկական այլ օբյեկտների կառուցման գործընթացներում:

Ինչպես մաթեմատիկական, այնպես էլ կամայական հասկացությունների ընդհանրացման արդյունքում անցում է կատարվում տեսակային հասկացությունից սեռային հասկացության, իսկ մասնավորեցումը անցում է սեռից տեսակին: Ասվածից հետևում է, որ ընդհանրացված հասկացության ծավալը ավելի լայն է, քան ընդհանրացվող կամ մասնավոր հասկացության ծավալը: Միաժամանակ, առաջինի նկատմամբ ավելի շատ են վերջինիս բնութագրիչ հատկությունները:

Դիտարկենք, օրինակ, քառակուսին: Նրա համար բնութագրիչ հատկություններ են քառանկյուն լինելը, քառանկյան կողմերի հավասարությունը և անկյունների հավասարությունը. քառակուսին այն քառանկյունն է, որի կողմերը իրար են հավասար, անկյունները՝ իրար: Քառակուսու այս երեք հատկություններից առաջին երկուսը որպես բնութագրիչ հատկություն ընդունելու միջոցով մենք կընդհանրացնենք քառակուսու հասկացությունը և կհանգենք շեղանկյան հասկացությանը, իսկ առաջին և երրորդ հատկությունների վերացարկումը և համապատասխան ընդհանրացումը մեզ կհանգեցնի ուղղանկյան հասկացությանը:

Դիտարկենք քառանկյունը, այն բազմանկյունը, որն ունի չորս կողմ: Եթե բազմանկյան այդ հատկությանը ավելացնենք նոր հատկություն՝ բոլոր անկյունների հավասարությունը, ապա ստացված հատկությունները կբնութագրեն նոր, ավելի նեղ ծավալով և, ուրեմն, տրվածի նկատմամբ ավելի մասնավոր հասկացություն՝ ուղղանկյունը: Եթե այս վերջի-

նիս բնութագրիչ հատկություններին ավելացնենք ևս մեկը՝ բոլոր կողմերի հավասարությունը, և արդեն դրանք դիտենք որպես բնութագրիչ հատկություններ, պապ կստանանք ավելի մասնավոր, շատ ավելի նեղ ծավալով հասկացություն՝ քառակուսին:

Դիտարկենք ընդհանրացման ևս մեկ օրինակ: Դիցուք կիրառական ինչ-որ խնդրի լուծում հանգել է թվային գործակիցներով քառակուսային հավասարման լուծման: Մեկ այլ խնդրի լուծում կարող է հանգել նույնպես քառակուսային հավասարման լուծման, բայց թվային այլ գործակիցներով: Որպեսզի ամեն անգամ չգրադվենք թվային կոնկրետ գործակիցներով քառակուսային հավասարման լուծման հարցի քննարկումով, մենք դիտարկում ենք տառային գործակիցներով քառակուսային հավասարման լուծման ընդհանուր խնդիրը և ստանում նրա լուծման ընդհանուր բանաձևը և այն կիրառում յուրաքանչյուր մասնավոր թվային գործակիցներով հավասարման լուծման դեպքում:

Ընդհանրացման և մասնավորեցման մեթոդները լայնորեն են կիրառվում նաև թեորեմների ստացման և ուսուցման գործընթացներում: Մասնավորապես, վերջինիս կիրառման արդյունքում թեորեմներից ստացվում են նրանց հետևանքները:

Ընդհանրացումը և մասնավորեցումը սերտորեն կապված են իմացության մյուս մեթոդների հետ: Այսպես, տրված օբյեկտի վերլուծության ընթացքում մենք այն մտովի տրոհում ենք մասերի, այսինքն՝ կատարում ենք մասնավորեցում, իսկ համադրման ընթացքում՝ միավորելով տրոհված մասերը, կատարում ենք դրանց ընդհանրացում: Ընդհանրացումը մասնակցում է նաև վերացարկման (տես հաջորդ կետը) գործընթացում՝ որպես դիտարկվող օբյեկտի ոչ էական հատկությունների մտովի անտեսմանը զուգահեռ նրա հիմնական կամ էական կողմերի և հատկանիշների դիտարկում՝ ընդհանրացում:

Ընդհանրացման և մասնավորեցման մեթոդների յուրաքանչյուր կիրառման դեպքում դրսևորվում են գիտական գեղեցիկի այնպիսի օբյեկտիվ հատկանիշներ, ինչպիսիք են՝ հստակությունը, պարզությունը և, առանձնապես, ընդհանրականությունն ու բազմազանությունների միասնականությունը, որոնք ուսուցանվող նյութին հաղորդում են գեղագիտական որոշակի գրավչություն:

4. Վերացարկումը և կոնկրետացումը

Վերացարկումը մտածողության հիմնական գործողություններից, հնարքներից մեկն է, ուսումնասիրվող օբյեկտի առավել էական հատկանիշների առանձնացումը, հեռացումը մյուսներից [92]: Մաթեմատիային ավելի հարագատ է թվում հետևյալ բնորոշումը. վերացարկումը կոնկրետ բազմության որոշ տարրերի մտային առանձնացումն է և դրանց հեռացումը բազմության մնացած տարրերից [52]:

Վերացարկումը գիտության կազմավորման և զարգացման կարևոր մեթոդներից մեկն է: Այն առավել լայն կիրառություն ունի մաթեմատիկայում: Ավելին, մաթեմատիկան ստեղծվել է հենց վերացարկման գործընթացների արդյունքում: Պատահական չէ, որ մաթեմատիկան անվանում են վերացական գիտություն (տես [175]):

Նույնացման վերացարկումը: Գոյություն ունեն վերացարկման մի քանի տեսակներ (տես [81], [175]): Վերացարկման կարևորագույն տեսակը նույնացման վերացարկումն է: Այն ստացվում է, երբ մտովի առանձնացվում են դիտարկվող օբյեկտների ընդհանուր հատկությունները և դիտարկվող օբյեկտները նույնացվում են այդ ընդհանուր հատկություններն ունենալու տեսանկյունից: Երբեմն ասում են նաև, որ օբյեկտները ընդհանրացվում են, և նույնացման վերացարկումն էլ անվանում են նաև ընդհանրացնող վերացարկում: Դա, իհարկե, չի նշանակում, որ դիտարկվող օբյեկտները լիովին նույնական են, ինչը տեղի ունի միայն տրված օբյեկտի և իր միջև (չնայած՝ սա նույնպես հարաբերական է, որովհետև յուրաքանչյուր օբյեկտ գտնվում է անընդհատ փոփոխության մեջ): Ընդհանրապես, առանց նույնացման վերացարկման անհնար է իրագործել իմացության գործընթացը: Իրարից տարբերել, օրինակ, իրար հետ ոչ լիովին նույնական՝ հայերեն միևնույն ա տառի տարբեր գրառումները, շախմատի միևնույն ֆիգուրի տարբեր օրինակները, միևնույն բառի տարբեր գրառումները, միևնույն մարդուն ժամանակի տարբեր պահերին և այլն:

Նույնացման վերացարկումը լայնորեն դիտարկվում և դրսևորվում է նաև մաթեմատիկայում և առանցքային դեր է խաղում հավասարության հասկացության ձևավորման գործում: Այստեղ նրա հիմքում ընկած է համարժեքության առնչությունը: Դիտարկվում է առարկաների կամայական ոչ դատարկ A դաս կամ բազմություն և դրա վրա տրված համարժե-

քության որևէ առնչություն՝ ρ երկտեղ առնչություն, որն օժտված է հետևյալ երեք հատկություններով.

- անդրադարձելի է, այսինքն՝ այդ A բազմության կամայական a տարր ինքն իր հետ մտնում է այդ առնչության մեջ՝ $a\rho a$,
- համաչափելի է, այսինքն՝ A բազմության կամայական a և b տարրերի համար եթե $a\rho b$, ապա $b\rho a$,
- փոխանցելի է, այսինքն՝ A բազմության կամայական a , b և c տարրերի համար եթե $a\rho b$ և $b\rho c$, ապա $a\rho c$:

Եթե A դասի կամ բազմության իրար հետ համարժեք, այսինքն՝ ρ առնչության մեջ գտնվող տարրերը միավորենք միևնույն ենթաբազմության կամ դասի մեջ, ապա այդ դասերը (համարժեքության կամ վերացարկման դասեր) կլինեն ոչ դատարկ, իրար հետ զույգ առ զույգ չեն հատվի և միավորվելով՝ կառաջացնեն A բազմությունը, այլ կերպ՝ մենք կստանանք A բազմության տրոհում (ստացված տրոհումը՝ առաջացած դասերի բամբությունը, մաթեմատիկայում կոչվում է A բազմության ֆակտոր-բազմություն ըստ ρ առնչության): Այդ տրոհման տարրերը, որ A բազմության ենթաբազմություններ են, բնութագրվում են իրենց տարրերից յուրաքանչյուրով և հաճախ նույնացվում են այդ տարրերի հետ: Այդ դեպքում միևնույն դասի տարրերը՝ նույնացման վերացարկմամբ համարվում են հավասար ըստ ρ հարաբերության, ρ -հավասար կամ ուղղակի հավասար, եթե դա տարակարծությունների տեղիք չի տալիս: Հասկանալի է, որ տրոհումը, ի տարբերություն տրված բազմության, արտահայտում է բոլորովին այլ հասկացության ծավալ, և ձևական տեսակետից ճիշտ չէ այդ նոր հասկացության ծավալի տարրերի հավասարության արտահայտման համար օգտագործել նախկին հասկացության ծավալի տարրերի հավասարությունը: Սակայն այս մոտեցումը հաճախ է կիրառվում մաթեմատիկայում. այն գրառումներին հաղորդում է որոշակի պարզություն և տարա-կարծությունների տեղիք չի տալիս (մանրամասները տես [239], [8]):

Բերենք մի քանի օրինակ մաթեմատիկայից:

Դիտարկենք բոլոր վերջավոր բազմությունների A դասը և նրա վրա տրված հետևյալ μ առնչությունը. երկու վերջավոր բազմություններ գտնվում են μ առնչության մեջ, եթե նրանց միջև գոյություն ունի վերադրում՝ փոխմիարժեք և վրա արտապատկերում: Ակնհայտ է, որ μ -ն համարժեքություն է, և մենք կարող ենք ստանալ μ -համարժեքության դասերը և A/μ ֆակտոր բազմությունը: Պարզ է նաև, որ միևնույն համար-

ժեքության դասի մեջ մտնում են այն վերջավոր բազմությունները, որոնք ունեն միևնույն թվով տարրեր: Նույնացման վերացարկմամբ մենք համարժեքության միևնույն դասի տարրերը հավասարեցնում ենք իրար և ստանում բնական թվերը՝ որպես համարժեքության դասեր: Իրականում այդ դասերից յուրաքանչյուրը բնորոշում է մեկ բնական թիվ, ինչի պատճառով հենց այդ դասերն էլ կոչվում են բնական թվեր:

Դիտարկենք հաջորդ օրինակը: Հարթության ուղղորդված հատվածների միջև սահմանվում է հետևյալ առնչությունը. երկու ուղղորդված հատվածներ գտնվում են այդ առնչության մեջ, եթե նրանք համուղղված են և նրանց երկարությունները իրար հավասար են: Դժվար չէ նկատել, որ սահմանված այս առնչությունը համարժեքություն է: Հետևաբար, մենք ստանում ենք հարթության բոլոր ուղղորդված հատվածների տրոհում և ֆակտոր-բազմություն ըստ այդ համարժեքության: Այդ տրոհման կամ ֆակտոր-բազմության տարրերը անվանվում են վեկտորներ: Իհարկե, վեկտորի այս հասկացությունը ստացվում է ուղղորդված հատվածի հատկությունների վերացարկման արդյունքում և ընկալման համար ավելի բարդ է: Այդ պատճառով մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում վեկտոր է անվանվում նաև ուղղորդված հատվածը, այսինքն՝ համարժեքության դասը նույնացվում է իր յուրաքանչյուր տարրի կամ ներկայացուցչի հետ, իսկ համարժեքության միևնույն դասի մեջ ընկած ուղղորդված հատվածներն էլ համարվում են իրար հավասար: Ուղղորդված հատվածի հետ նրա վերացարկման արդյունքում ստացված վեկտորի նման նույնացումը օգտագործվում է նաև մաթեմատիկայի կիրառություններում:

Քննարկենք երրորդ օրինակը: Հանրահաշվում ռացիոնալ թիվը ներմուծվում է ամբողջ թվերի կարգավորված գույգի զաղափարի վերացարկման միջոցով: Դա արվում է հետևյալ կերպ. դիտարկվում է ամբողջ թվերի բոլոր այն կարգավորված գույգերի բազմությունը, որոնց երկրորդ բաղադրիչը գրոյից տարբեր է: Այդ բազմության մեջ սահմանվում է հետևյալ առնչությունը. (a, b) գույգը առնչվում է (c, d) գույգի հետ այն և միայն այն դեպքում, եթե $ad = bc$, որտեղ a, b, c, d-ն կամայական ամբողջ թվեր են և b-ն ու d-ն գրոյից տարբեր են: Առանց դժվարության ցույց է տրվում, որ սահմանված առնչությունը համարժեքություն է: Հետևաբար, կարելի է կազմել դիտարկվող գույգերի բազմության տրոհումը՝ ֆակտոր բազմությունը, որի տարրերն էլ կոչվում են ռացիոնալ թվեր: (a, b) գույգը պարունակող ռացիոնալ թիվը կամ համարժեքության դասը, այսինքն՝

(a, b)-ի հետ համարժեք բոլոր գույգերի բազմությունը նշանակվում է a/b տեսքով և անվանվում է նաև a համարիչով և b հայտարարով կոտորակ: Սակայն ընկալման համար նման մոտեցումը բավականին բարդ է, և մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում կարգավորված գույգերի վերացարկման արդյունքում ստացված ռացիոնալ թիվը կամ համարժեքության դասը նույնացվում է այդ դասի կամայական ներկայացուցչի՝ դասին պատկանող կարգավորված գույգի հետ՝ նրա գրառման համար պահպանելով նույն նշանակումը: Ընդ որում, a ամբողջ թիվը նույնացվում է (a, 1) կարգավորված գույգի կամ a/1 կոտորակի հետ, իսկ a/b կոտորակը հավասարվում է a/1 և b/1 կոտորակների քանորդին, ինչը թույլ է տալիս այն ընկալել որպես a և b ամբողջ թվերի քանորդ կամ հարաբերություն: Նշենք, որ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացներում ռացիոնալ թիվը հենց այդպես էլ սահմանվում է: Իհարկե, այնտեղ չեն քննարկվում դրա հիմքում ընկած այն օրինաչափությունները, որոնց մասին մենք խոսեցինք:

Կատարենք հավասարության գաղափարի ներմուծման վերաբերյալ մեկ այլ դիտարկում: Երկրաչափության մեջ հավասարության գաղափարը դրսևորվում է ևս մեկ կողմով, ինչը բացահայտել է Ֆ. Քլայնը իր հանրահայտ Էրլանգենյան ծրագրում: Նա հավասարության հիմքում դրել է ձևափոխությունների խմբի գաղափարը: Բանն այն է, որ եթե մենք ունենք, օրինակ, հարթության ձևափոխությունների որևէ G խումբ և այդ հարթության երկու պատկերներ համարում ենք հավասար (G-հավասար), եթե դրանցից մեկը բերվում է մյուսին G-ի ինչ-որ ձևափոխության միջոցով, ապա նման ձևով սահմանված հավասարությունը (G-հավասարությունը) օժտված է համարժեքության՝ անդրադարձելիության, համաչափության և փոխանցելիության հատկություններով, ինչն անհրաժեշտ է հավասարության հասկացության ներմուծման համար:

Իսկապես, քանի որ ձևափոխությունների յուրաքանչյուր խումբ, այդ թվում նաև G-ն պարունակում է ε նույնական ձևափոխությունը, ապա կամայական F պատկերի համար ունենք $\varepsilon(F) = F$: Այսինքն՝ պատկերների G-հավասարության առնչությունը անդրադարձելի է: Այնուհետև, եթե հարթության F_1 և F_2 պատկերների համար $F_1 = F_2$, ապա G-ի ինչ-որ f տարրի համար $f(F_1) = F_2$: Այստեղից կստանանք $f^{-1}(F_2) = F_1$, այսինքն $F_2 = F_1$: Այսպիսով՝ պատկերների G-հավասարության առնչությունը համաչափելի է: Վերջապես, եթե $F_1 = F_2$, $F_2 = F_3$, ապա G-ի ինչ-որ f և g տարրերի համար $f(F_1) = F_2$, $g(F_2) = F_3$: Բայց $(f \circ g)(F_1) = g(f(F_1)) = g(F_2) = F_3$: Հետևապես՝

$F_1 = F_3$: Այսինքն՝ պատկերների G-հավասարության առնչությունը նաև փոխանցելի է:

Այս կերպ, ելնելով շարժման, նմանության, աֆինական և երկրաչափական այլ տիպի ձևափոխությունների խմբերից, ստացվում են երկրաչափական պատկերների համապատասխան հավասարությունները և նաև երկրաչափության համապատասխան բաժինները: Քլայնի այս մոտեցումը մաթեմատիկայի տարրեր բնագավառներում առկա խորը կապերի հրաշալի օրինակ է: Դա վկայում է նաև երկրաչափական հավասարության գաղափարի գեղագիտական մեծ ներուժի մասին, քանի որ երկրաչափական ձևափոխությունները, ըստ էության, այս կամ այն հատկությամբ օժտված համաչափություններ են, իսկ համաչափությունը գեղեցիկի գիտական բաղադրիչներից մեկն է: Սա երկրաչափական հավասարությունը տալիս է նաև լրացուցիչ գեղագիտական արժեք:

Մաթեմատիկայում վերացարկման կիրառմամբ հասկացությունների ձևավորման կարևոր միջոց է այսպես կոչված՝ կոլեկտիվացնող կամ բնութագրիչ հատկությունը, հատկություն, որն ընդհանուր է տրված բազմության որոշ տարրերի համար և միավորում է այդ տարրերը մի բազմության մեջ, ինչը կազմում է այդ հատկությամբ բնորոշվող մաթեմատիկական հասկացության ծավալը: Եթե A բազմության տարրերի բնութագրիչ հատկությունը նշանակենք $P(x)$ -ով, ապա $P(x)$ -ը ճշմարիտ կլինի այն և միայն այն դեպքում, եթե $x \in A$: Այդ դեպքում ընդունված է A բազմությունը գրառել $\{x \mid P(x)\}$ տեսքով՝ $A = \{x \mid P(x)\}$: Օրինակ, եթե $P(x)$ -ը հետևյալ հատկությունն է՝ x -ը գույգ բնական թիվ է, ապա $2Z = \{x \mid P(x)\} = \{x \mid x \in N, x:2\}$: Հասկանալի է, որ սա գույգ թվերի բազմությունն է կամ «գույգ թիվ» հասկացության ծավալը:

Հարկ է նկատել, որ ինչպես բազմությունների տրման կամ կառուցման այս եղանակի, այնպես էլ նույնացման վերացարկման մեջ լավագույնս դրսևորվում են գիտական գեղեցիկի բազմազանությունների միասնության և ընդհանրականության հատկանիշը: Միննույն ժամանակ նրանում արտահայտվում են նաև գիտական գեղեցիկի՝ հստակության և տրամաբանական խստության հատկանիշները: Սակայն պետք է նկատի ունենալ նաև, որ այն ձևավորվում է վերացարկման ավելի բարձր աստիճանում և, ուրեմն, ավելի դժվար է ընկալվում: Եվ եթե բուհի մաթեմատիկական մասնագիտության ուսանողի համար նրա տիրապետումը ժամանակակից մաթեմատիկայի հիմքը հանդիսացող բազմությունների տեսության տիրապետման նախապայմաններից մեկն է, ապա ընկալումը չափազանց

դժվար է հանրակրթական դպրոցի աշակերտի համար: Այստեղ լիարժեք դրսևորվում է գիտական գեղեցիկի հստակության հատկանիշը, բայց խախտվում է պարզության հատկանիշը: Այդ պատճառով պետք է խուսափել այս գաղափարը հանրակրթություն ներառելուց:

Իդեալականացում կամ իդեալականացման վերացարկումը: Գիտական իմացության մեջ կարևոր դեր է խաղում նաև վերացարկման ևս մի տեսակ, որ կոչվում է իդեալականացում: Ինչպես առօրեական խոսակցության, այնպես էլ գիտության մեջ այս հասկացությունը օգտագործվում է ինչ-որ բան ավելի կատարյալ ներկայացնելու նպատակով, քան իրականում այն կա: Ի տարբերություն նույնացման վերացարկման, որի միջոցով ստացվող հասկացությունների ծավալներում կարող են լինել նաև իրական աշխարհի առարկաներ, իդեալականացման արդյունքում ստացվող հասկացությունների ծավալներում ընդգրկված տարրերը իրականության մեջ գոյություն չունեն (տես [147]): Իդեալականացումը կիրառվում է մարդկային կենսագործունեության ամենատարբեր ոլորտներում մտավոր գործունեություն իրականացնելիս և տարբեր գործոնների ազդեցությամբ: Իդեալականացումը պոետների, նկարիչների և, ընդհանրապես, ստեղծագործողների կարևոր և սիրած հնարքներից է:

Իդեալականացումը նաև գիտական իմացության կարևոր մեթոդներից է: Բոլոր այն հետազոտություններում, որտեղ կատարվում է բնագիտական գաղափարի կամ օրինաչափության մաթեմատիկական մոդելավորում, մենք գործ ունենք իդեալականացման հետ: Այստեղ իմացական այդ մեթոդը հնարավորություն է տալիս փորձնական դիտարկումը տեղափոխել, բարձրացնել իմացության տեսական մակարդակ և ստացված հարցերի լուծումը ստանալու համար օգտվել մաթեմատիկայի հարուստ և հզոր զինանոցից: Ֆիզիկայում, օրինակ, դիտարկվում են մաթեմատիկական ճոճանակը, իդեալական գազը և այլն, որոնք թեև իրականության մեջ գոյություն չունեն, բայց հնարավորություն են տալիս խորացնելու համապատասխան ֆիզիկական երևույթների ուսումնասիրությունը մաթեմատիկայի միջոցներով:

Իդեալականացման մեթոդը կիրառվում է նաև բուն մաթեմատիկական ուսումնասիրություններում: Կետը, ուղիղը, հարթությունը, օրինակ, մաթեմատիկայի իդեալականացված հասկացություններ են. ուղիղը երկու վայրերի միջև ձգվող ճանապարհի իդեալականացումն է, հարթությունը՝ իրական ծոմոված մակերևույթների իդեալականացումը և այլն:

Հասկանալի է, որ բացի գեղագիտական այլ հատկանիշներից, մաթեմատիկայում իդեալականացման գործընթացը առաջին հերթին ուղեկցվում է գիտական գեղեցիկի կիրառելիության հատկանիշով, ինչը գործընթացին հաղորդում է լրացուցիչ գեղագիտական գրավչություն:

Իրագործելիության վերացարկումը: Մեզ շրջապատող իրական աշխարհը անվերջ է ու անսպառ, ինչն արտահայտվում է բնության մեջ տեղի ունեցող երևույթների, դրանց մասին մեր գիտելիքներ անսպառությամբ: Անվերջ մեծ ու վերնից անսահմանափակ են աստղագիտության և անվերջ փոքր ու ներքևից դրական թվով սահմանափակ չեն միջուկային ֆիզիկայում ուսումնասիրվող մեծությունները: Անվերջ են բնական թվերի բազմությունը, իրական թվերի կամայական հատված և այլն:

Նախ նշենք, որ ի տարբերություն վերջավոր բազմությունների, անվերջ բազմությունները չափի են ընկնում իրենց արտասովորությամբ: Դիտարկենք, օրինակ, բնական թվերով համարակալված (մաթեմատիկայում դրանք կոչվում են հաշվելի բազմություններ) մի հյուրանոց, որի բոլոր համարները կամ սենյակները զբաղեցված են հյուրերով: Թվում է, թե այդ հյուրանոցում այլևս հնարավոր չէ նոր հյուրեր տեղավորել: Սակայն, ի տարբերություն վերջավոր հյուրանոցի, նման հյուրանոցը հնարավորություն ունի տեղավորելու ցանկացած թվով մարդ՝ առանց որևէ մեկին հյուրանոցից հանելու: Դրա համար բավական է յուրաքանչյուր համարում ապրող հյուրին տեղավորել հաջորդ համարում, և մենք կունենանք մեկ ազատ սենյակ՝ առաջին համարը և այլն:

Իսկ ինչպիսի՞ն են անվերջի ուսումնասիրման խնդրում մարդու կամ, ավելի ճիշտ, մաթեմատիկայի հնարավորությունները: Այս հարցի վերաբերյալ տեսակետները տարբեր են: Ոմանք կարծում են, որ մարդը իր կյանքում գործ է ունենում միայն վերջավոր թվով օբյեկտների հետ, և այդ ընթացքում էլ ձևավորվում է նրա մտածողությունը: Մասնավորապես, նրանց կարծիքով նման վերջավոր գործողությունների արդյունքում ձևավորված մարդկային մտածողությունը և տրամաբանությունը չի կարելի կիրառել անվերջ երևույթների և անվերջ մաթեմատիկական օբյեկտների (ակտուալ անվերջի) նկատմամբ: Ուրիշները ավելի հեռու են գնում և բացառում են նաև մաթեմատիկայում այնպիսի թվերի դիտարկումը, որոնց կառուցումը վեր է մարդու հնարավորություններից (պոտենցիալ անվերջ): Թե առաջին և թե, մանավանդ, երկրորդ մոտեցման կողմնակիցները մաթեմատիկայի ուսումնասիրության տիրույթում չեն ներառում դասական մաթեմատիկայի հսկայական բաժիններ: Բավական է նշել,

օրինակ, առաջին տեսակետը պաշտպանողների կողմից անվերջ փոքրի, ֆունկցիայի սահմանի, Կոշու հանրահայտ թեորեմի և դասական այլ արդյունքների անտեսումը:

Զուտ մաթեմատիկայի հիմնավորման տեսակետից ակտուալ (պոտենցիալ) անվերջի ներառումը մաթեմատիկայի ուսումնասիրման ոլորտ նշանակում է մաթեմատիկայի կառուցման տրամաբանական զինանոցում՝ մեթամաթեմատիկայում ներառել ակտուալ (պոտենցիալ) իրագործելիության վերացարկումը:

Գիտական գեղեցիկի տեսանկյունից անվերջի ուսումնասիրության հարցում մենք ավելի շատ մոտենում ենք վեհի կատեգորիային (տես առաջին գլուխը):

Կոնկրետացում: Վերացարկման հակառակ գործընթացը կոչվում է կոնկրետացում: Եթե հասկացության վերացարկումը նշանակում է նրա բնութագրիչ հատկությունների մի մասի անտեսում և մյուս հատկությունների առանձնացման միջոցով նոր հասկացության ձևավորում, ապա կոնկրետացումը վերաբերում է հասկացության ծավալում ընդգրկված տարրերին. այս դեպքում անտեսվում են հասկացության ծավալի մյուս բոլոր տարրերը և դիտարկվում է մեկը: Այսինքն՝ կոնկրետացումը, որոշ իմաստով, անցումն է բազմությունից նրա տարրին:

Կոնկրետացումը կարող է կիրառվել ինչպես մաթեմատիկական հասկացությունների ձևավորման, այպես էլ թեորեմների ուսուցման և, մանավանդ, կիրառման գործընթացներում: Օրինակ, թվային գործակիցներով քառակուսային հավասարումների լուծման ընթացքում մենք օգտվում ենք ընդհանուր տեսքի քառակուսային հավասարման լուծման ընդհանուր բանաձևից, կամ այն բանից, որ թվային բազմությունների համար տեղի ունի գումարման գույքորդական օրենքը՝

$$\forall x, y, z \quad (x + (y + z)) = ((x + y) + z) ,$$

հետևում է, որ ինչպիսի թվեր էլ վերցնենք նշված փոփոխականների փոխարեն, նրանց գումարը գումարելիների գույքորդման ձևից կախված չէ. օրինակ՝ $(1234 + 236) + 3276 = 1234 + (236 + 3276)$ բանաձևը ստուգման կարիք չունի. նրա ճշմարտացիությունը ստացվում է գումարման գույքորդական օրենքից՝ կոնկրետացման կանոնի հիման վրա:

Կոնկրետացման մեթոդի մեջ առաջին հերթին դրսևորվում է գիտական գեղեցիկի կիրառելիության հատկանիշը:

Բերված օրինակներում, ինչպես և վերացարկման, ընդհանրացման, մասնավորեցման և կոնկրետացման մեթոդների յուրաքանչյուր կիրառման դեպքում դրսևորվում են գիտական գեղեցիկի այնպիսի օբյեկտիվ հատկանիշներ, ինչպիսիք են՝ հստակությունը, պարզությունը, ընդհանրականությունը, բազմազանությունների միասնականությունը և այլն, որոնք ուսուցանվող նյութին հաղորդում են գեղագիտական որոշակի գրավչություն:

Հարկ է նշել, որ ճանաչողության գործընթացում ընդհանրացումը և վերացարկումը հաջորդում են մասնավորեցմանը և կոնկրետացմանը: Երեխան իր գիտելիքը ստանում է նախ և առաջ փորձի, էմպիրիկ մեթոդի միջոցով: Նա ձեռքը տանում է կրակին և ուզում է բռնել այն, որովհետև կրակը գեղեցիկ է: Բայց կրակը նաև վառում է, և երեխան ձեռքը հետ է քաշում: Նման փորձերից՝ վերացարկման արդյունքում նրա մոտ ձևավորվում է «կրակը չի կարելի բռնել» ընդհանրական գիտելիքը: Այդպես է եղել իրերի, երևույթների ճանաչողության ընթացքը նաև պատմականորեն: Եվ այդ ընթացքում մարդկությունը կուտակել է ընդհանրական գիտելիքներ, որոնք փոխանցում է սերունդներին. ժամանակակից երեխան ոչ թե մի քանի անգամ ձեռքը վառելով ինքն է հայտնաբերում, որ կրակը չի կարելի բռնել, այլ օգտվում է «կրակը չի կարելի բռնել» ընդհանրական գիտելիքից, որ նրան տալիս է մարդկության փորձը՝ երեխայի ծնողի միջոցով: Նույն կերպ նա սովորում է բարոյական նորմերը և կանոնները. չի կարելի ստել, գողանալ և այլն: Սա հեշտացնում է մարդու կյանքը, նպաստում մարդկության զարգացմանը և առաջընթացին, և գեղեցիկ է:

Սակայն իմացության նման ընթացքը թվում է անբնական. այն երեխայի կողմից կարող է ընկալվել որպես պարտադրանք: Այդ դեպքում երեխան դժկամությամբ է սովորում բարոյական նորմը, կանոնը, գիտական օրենքը, մաթեմատիկական թեորեմը, մասնավանդ՝ դժվարանում է այն կիրառել: Դրա հաղթահարման ճանապարհը մեկն է. ուսուցումը ուղղորդել դեպի ճանաչողության բնական հուն՝ կոնկրետից, մասնավորից դեպի ընդհանուրը: Այդ դեպքում երեխան, սովորողը ընդհանրական գիտելիքը ստանում է որպես սեփական հայտնագործություն, որպես ստեղծագործություն, ինչը որոնման այդ ճանապարհին հաղորդում է գեղագիտական մեծ գրավչություն, որովհետև այստեղ գործում են գիտական գեղեցիկի՝ բազմազանությունների միասնության օբյեկտիվ հատկանիշը և այնպիսի կարևոր սուբյեկտիվ հատկանիշներ, ինչպիսիք են ինտելեկ-

տուալ որոնումը, դրա արդյունքը՝ գտնելը կամ հայտնագործելը և, իհարկե, ստեղծագործությունը:

5. Համեմատության գեղագիտական գրավչությունը մաթեմատիկական կրթության մեջ

Համեմատությունը մտածողության հնարքներից մեկն է, ճանաչողության կարևոր միջոց, իմացության տրամաբանական մեթոդ: Համեմատությունը նաև գեղագիտական արժեքների, գեղեցիկի բացահայտման միջոց է: Իզոլը չի ասված, որ «գեղեցիկը երևում է համեմատության մեջ»: Այն, որ համեմատությունը ընդունվում է որպես գիտական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշ, արդեն համեմատությամբ ուղեկցվող մաթեմատիկական գործընթացներին հաղորդում է որոշակի գեղագիտական գրավչություն: Սակայն ինչպես մաթեմատիկայում, այնպես էլ նրա դասավանդման գործընթացում, համեմատությամբ ուղեկցվող գործընթացները օժտված են նաև գիտական գեղեցիկի օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ այլ հատկանիշներով, ինչը այդ գործընթացներին հաղորդում է ավելի մեծ գեղագիտական գրավչություն:

Համեմատության միջոցով մենք կարողանում ենք պարզել առարկաների նմանությունները և տարբերությունները, բացահայտել դրանցում ընդհանուր հատկությունների առկայությունը կամ դրանց բացակայությունը: Կարևոր է նկատի ունենալ, որ համեմատությունը հանգեցնում է ճշմարիտ եզրակացության, եթե համեմատվում են առարկաների էական հատկանիշները: Օրինակ, եթե երկու եռանկյուններ համեմատենք, էլենլով նրանց գագաթների համար ընունված տառերի նշանակումներից, ապա որևէ էական արդյունքի չենք կարող հանգել:

Համեմատությունը նաև մաթեմատիկայի հետազոտման և ուսուցման հիմնական մեթոդներից մեկն է, եթե ոչ հիմնականը: Այստեղ այն դրսևորվում է նախ և առաջ հավասարության, անհավասարության, նմանության առնչությունների, թվերի, համասեռ և ոչ համասեռ մեծությունների համեմատության տեսքով:

Առարկաների համեմատումը: Համեմատությունը մեծ կիրառություն ունի ինչպես մաթեմատիկայում, այնպես էլ նրա դպրոցական դասընթացում: Հիմնականում իրար հետ համեմատվում են համասեռ առարկաները: Այս ճանապարհով է կատարվում, օրինակ, մեծություն-

ների չափումը: Այստեղ մեծ դեր ունի նաև թվերի համեմատության ընթացքը, որի արդյունք է այնպիսի հիմնարար հասկացություն, ինչպիսին ֆունկցիան է:

Կարելի է համեմատել նաև անհամասեռ առարկաները կամ մեծությունները: Օրինակ, խանութում վաճառվող որևէ ապրանքի կողքին կարող է գրված լինել «1 կիլոգրամը՝ 400 դրամ», ինչը ցույց է տալիս այդ ապրանքի գինը: Կամ ավտոմեքենայի արագաչափը կարող է ցույց տալ 100 կմ/ժամ ցուցմունքը՝ նրա արագությունը: Առաջին դեպքում իրար հետ համեմատվում են զանվածի և դրամի քանակությունները, երկրորդում՝ երկարությունը և ժամանակը: Ըդհանրապես, անհամասեռ մեծությունների համեմատության միջոցով է կատարվում համեմատականությունների ուսումնասիրությունը:

Ոչ համասեռ մեծությունների համեմատության արդյունքում հնարավոր է դառնում դիտարկել կիրառական այնպիսի կարևոր հասկացություններ, ինչպիսիք են՝ արագությունը, գինը, տոկոսադրույքը: Իսկ ընդհանուր մոտեցումը հանգեցնում է կշռույթի ընդհանրական հասկացության, հասկացություն, որը կազմում է հայերենի լեզվամտածողության կարևոր տարր և օգտագործվում է արևմտահայերենում: Մասնավորապես, այն ընդհանրացնում է տոկոսի և հարգի հասկացությունները: Պատահական չէ նրա *rate* ձևի լայն կիրառումը անգլերենում: Ճիշտ է, ռուսերենը չի օգտագործում այդ հասկացությունը, բայց մենք պետք է ոչ թե կուրորեն հետևենք ռուսերենին, այլ մեր ազգային ավանդույթներին, համաշխարհային փորձին և, որ ամենակարևորն է, լեզվամտածողության զարգացման, լեզվի հարստացման միտումներին: Կշռույթի հասկացությունը, բացի ընդհանրականությունից, աչքի է ընկնում նաև հստակության, պարզության, բազմազանությունների միասնության և գիտական գեղեցիկի օբյեկտիվ այլ հատկանիշներով, ինչը նրա ուսուցման գործընթացին հաղորդում է գեղագիտական մեծ գրավչություն: Նշենք, որ [9] դասագրքում բերված է կշռույթի հետ կապված նյութի մեթոդապես մշակված շարադրանքը (տես նաև [7]):

Հանրահաշվի և երկրաչափության հասկացությունների և նրանց հատկությունների համեմատության գործընթաց է կողորդինատական մեթոդի կիրառությունը, որի դերը շատ մեծ է ինչպես մաթեմատիկայում, այնպես էլ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում: Համեմատության հրաշալի դրսևորումներ են անկյան կամ թվի սինուսը, կոսինուսը, տանգենսը և կոտանգենսը, թվի լոգարիթմը և այլ հասկացություններ, որոնք ստաց-

վում են թվերի համեմատությունների միջոցով, արտահայտում են մաթեմատիկական խորը օրինաչափություններ և ունեն կիրառական մեծ նշանակություն:

Օրինակ, լոգարիթմի հասկացությունը հնարավորություն է տալիս թվերի բազմապատկաման գործողությունը հանգեցնել գումարման գործողության, ինչը իր ժամանակի համար հաշվումների տեխնիկական պարզեցման լուրջ հնարավորություն տվող շատ մեծ ու անչափ կարևոր նորամուծություն էր: Այսինքն՝ այստեղ առկա է կիրառելիության գեղագիտական հատկանիշը: Թեև լոգարիթմի հասկացության մաթեմատիկական ինքը օժտված է մի շարք հետաքրքիր հատկություններով, որոնք ունեն անսպասելիության, անկանխատեսելիության, տրամաբանական խստության և գիտական գեղեցիկի մի շարք այլ հատկանիշներ, սակայն այդ գաղափարի ներմուծման գեղագիտությունը կարելի է գնահատել արդեն որպես հեղափոխական քայլ: Մինևույն ժամանակ, կարելի է ասել, որ լոգարիթմի հայտնաբերման հիմնական խթանը եղել է գիտական գեղեցիկը, ավելի ճշգրիտ՝ գիտական գեղեցիկի՝ կիրառելիության և բարդը պարզին հանգեցնելու սկզբունքները:

Համեմատության մեթոդի կիրառման այս և այլ օրինակներ օժտված են գիտական գեղեցիկի բազմաթիվ օբյեկտիվ հատկանիշներով, իսկ նրանց ուսուցումը ուղեկցվում է նաև գիտական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշների դրսևորմամբ, ինչը պետք է ամեն կերպ երևան հանել ուսուցման գործընթացն իրականացնելիս: Ասվածից հետևում է նաև համեմատության տրամաբանական մեթոդի թե՛ կարևոր նշանակությունը, թե՛ գեղագիտական գրավչության արտահայտման մեծ ներուժը մաթեմատիկայի ողջ դասընթացում:

Հավասարությունը և գեղագիտական արժեքների ձևավորումը: Նախորդ կետում մենք անդրադարձանք հավասարության գաղափարի ձևավորման խնդրին՝ կապված նույնացման վերացարկման հետ: Մաթեմատիկայում հավասարության գաղափարի ուսումնասիրությանը առաջին անգամ անդրադարձել է Գ. Լայբնիցը: Նա երկու առարկաներ անվանել է հավասար, եթե դրանք օժտված են մինևույն հատկությամբ: Լայբնիցի սահմանման խոցելի կողմը «հատկություն» եզրույթի անհստակությունն է, ինչը ճշգրտել է Ա. Տարսկին (տես [198]): Ելնելով Լայբնիցի ձևակերպումից՝ հեշտությամբ կարելի է ապացուցել հավասարության բնութագրիչ երեք հատկությունները՝ անդրադարձելիությունը, համաչափելիությունը և փոխանցականությունը, ինչը հնարավորություն է տալիս

կիրառել նույնացման վերացարկումը և հավասարության ներմուծման ուղղությամբ կիրառել տարբեր մոտեցումներ (տես նախորդ կետը):

Հավասարությունը մաթեմատիկայում խաղում է հիմնարար դեր: Այն ոչ միայն հետազոտման մեթոդ է, այլև ուսումնասիրության առարկա. մաթեմատիկան մեծ մասամբ հանդես է գալիս որպես զանազան հավասարությունների և դրանց ապացուցումների մասին գիտություն: Այդ հավասարությունները բացահայտում են մաթեմատիկական զանազան հասկացությունների միջև եղած փոխհարաբերությունները: Դրանք նաև մաթեմատիկայի կիրառական ոլորտում առկա փոխհարաբերությունների մաթեմատիկական դրսևորումներ են: Դրանք և դրանց ապացուցումները հստակ են, հաճախ անսպասելի են ու անկանխատեսելի: Գիտական գեղեցիկի այս հատկանիշները ավելացնում են մաթեմատիկական հավասարությունների գեղագիտական ներուժը և գրավչությունը:

Հավասարությամբ արտահայտվող բանաձևերի ապացուցումները մշտապես ուղեկցվում են հետաքրքրության, զարմանքի, բավարարվածության և հուզական այլ վիճակների դրսևորումներով: Նշենք նաև, որ հավասարության գաղափարի գեղագիտական ներուժը ավելանում է արդարության բարոյական սկզբունքի հետ ունեցած նրա խորը կապերի շնորհիվ (տես [14]):

Հարկ է նշել, որ հավասարության գաղափարը ոչ միշտ է հիմնավոր կիրառություն գտնում մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում: Դրա կենտրոնական հասկացություններից մեկը լինելու փոխարեն՝ այն նաև հաճախ սխալ մեկնաբանություն է ստանում: Ինչպես նշվեց վերևում, հավասարությունը օբյեկտիվ ճշմարտության արտահայտություններից մեկն է, նրա բացահայտման բանալի: Սա պետք է դառնա սովորողի սեփականությունը: Սովորողը պետք է համոզված լինի, որ կյանքում, մաթեմատիկայում կամ հարակից գիտություններում և ուսումնական առարկաների մեջ կողմնորոշվելու և ճշմարտությունը հայտնաբերելու հիմնական չափանիշներից մեկը հավասարություններն են: Իսկ ի՞նչ է տեղի ունենում իրականում: Մաթեմատիկայի դասընթացներում հավասարության գաղափարը աղավաղվում է. այդ օբյեկտիվ ճշմարտությանն ավելացվում է ճշմարիտի սուբյեկտիվ և հեղհեղուկ լրացուցիչ բնորոշումը, և ներմուծվում «ճիշտ հավասարություն» անդեմ հասկացությունը: Ստացվում է, որ գոյություն ունեն նաև ոչ ճիշտ հավասարություններ, և ամեն անգամ հավասարության տեսքով գրված բանաձևերի համար պետք է պարզել ու նշել՝ այն ճիշտ է, թե ոչ:

Հանրակրթական դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացներում ներառված հավասարությունները աչքի են ընկնում իրենց հստակությամբ, պարզությամբ, տրամաբանական խստության, անսպասելիության և գիտական գեղեցիկի այլ հատկանիշներով, և ունեն կիրառական նշանակալի արժեք, ինչը դրանց ուսուցումը դարձնում է գրավիչ: Դրան ավելանում են նաև գեղագիտական այնպիսի հատկանիշներ, ինչպիսիք են կայունությունը՝ կապված հավասարության անդրադարձելիության հետ, համաչափությունը՝ կապված հավասարության նույնանուն հատկության հետ, և ռիթմը՝ կապված հավասարության փոխանցելիության հատկության հետ:

Ինչ վերաբերում է երկրաչափության դպրոցական դասընթացին, ապա այստեղ հավասարության հիմքը շարժումն է, որի ուսուցումը հարուցում է որոշակի դժվարություններ: Եվ շատ հեղինակներ, ելնելով ուսուցման մատչելիության դիդակտիկական սկզբունքից, երկրաչափության իրենց կառուցած դասընթացներում շարժումը փոխարինում են վերադրմամբ, ինչը առարկությունների տեղիք է տալիս այդ հասկացության անհստակության պատճառով: Այսպիսով, երկրաչափական հավասարության հասկացության ներմուծման դպրոցական փորձը չի կարողանում ցուցադրել գիտականում առկա հստակության և տրամաբանական խստության գեղագիտական հատկանիշները: Բայց սա չի խանգարում երկրաչափական դպրոցական դասընթացի մեջ պատկերների հավասարության լիարժեք կիրառմանը, որոնք աչքի են ընկնում իրենց դիտողականությամբ, պարզությամբ, հստակությամբ, տրամաբանական խստությամբ և գեղագիտական գրավչության օբյեկտիվ այլ հատկանիշներով:

Անհավասարությունը և գեղագիտական արժեքների ձևավորումը: Անհավասարությունները հավասարությունների հետ միասին կազմում են հանրահաշվի դպրոցական դասընթացի հիմնական բանաձևերը, և դրանց գեղագիտական գրավչությունը շատ կոդմերով նման է հավասարությունների գեղագիտական գրավչությանը:

Գիտության մեջ և կյանքում կիրառվում է անհավասարության գաղափարի ձևավորման երկու եղանակ: Դրանցից մեկում անհավասարությունը սահմանվում է առարկաների ուղղակի համեմատությամբ: Օրինակ, երկնծարանոց կշեռքի նժարներին դրվում են համեմատվող a և b ծանրությամբ առարկաները, և եթե նժարներից մեկը, որում դրված է a ծանրությամբ առարկան, ավելի բարձր դիրք է ընդունում, ապա ստանում են $a < b$ անհավասարությունը: Իրական թվերի պարագայում երկու իրա-

կան թվերից մեծ է համարվում այն, որը թվային ուղղի վրա ընկած է ավելի աջ: Մյուս մոտեցմամբ՝ կազմվում է $a - b$ տարբերությունը, և կախված նրանից, արդյոք այն դրական է կամ բացասական, համապատասխանաբար ստացվում են $a > b$ կամ $a < b$ անհավասարությունները: Վերջին մոտեցման մեջ վճռորոշ դերը պատկանում է դրական իրական թվերի բազմությանը, որը կազմում է իրական թվերի դաշտի կամ համակարգի դրական կոնուսը՝ փակ է գումարման և բազմապատկման գործողությունների նկատմամբ: Հանրահաշվում այս մոտեցումը թույլ է տալիս ընդհանրացնել կարգի կամ անհավասարության գաղափարը հանրահաշիվների բավականին լայն դասի համար և հնարավորություն է տվել նրա ճյուղերից մեկի՝ կարգավորված համակարգերի տեսության ստեղծման:

Նման մոտեցման արդյունավետությունը հիմք է ծառայել նաև հանրահաշվի դպրոցական դասագրքերի շատ հեղինակների համար՝ որդեգրելու անհավասարության ներմուծման այս երկրորդ եղանակը: Մակայն հաշվի առնելով այն, որ հանրահաշվի դպրոցական դասընթացում կարգը, անհավասարությունը ներմուծվում է միայն իրական թվերի համար, իսկ վերջիններիս ուսումնասիրության համար էլ կիրառվում է թվային ուղիղը, ապա ոչ մի հիմք չկա թվային ուղղի միջոցով իրական թվերի պարզ համեմատությունը փոխարինել դրական իրական թվերի միջոցով կատարվող համեմատությամբ:

Մյուս կողմից, հանրահաշվի դասագրքերի մեծ մասում (առանձնապես՝ ռուսական դասագրքերում) ավանդաբար անհավասարություններին նվիրված թեմայի ուսուցումը կատարվում է միասնաբար: Այնինչ հանրահաշվի հենասյուները հանրահաշվական գործողություններն են՝ գումարումը, հանումը, բազմապատկումը, բաժանումը, արմատ հանելը և այլն, որոնց հետ էլ պետք է կապել ինչպես հավասարության, այնպես էլ անհավասարության գաղափարի ուսուցումը: Այս բնական մոտեցումը թույլ է տալիս անհավասարությունը դնել մյուս բանաձևերի հետ հավասար դիրքերում, նրա ուսուցումը տարրալուծել ողջ դասընթացի մեջ՝ այն դարձնելով հանրահաշվի բովանդակության օրգանական մաս՝ ինչպես բուն տեսական նյութի, այնպես էլ հանրահաշվի կիրառությունների տեսանկյունով: Սա նաև բնական և ամբողջական տեսք է տալիս հանրահաշվի դպրոցական դասընթացի կառուցվածքին, ընդգծում բանաձևերի միջև առկա փոխհարաբերությունները, կապերը և նրա ներքին միասնականությունը: Այսինքն, այս դեպքում նյութի կառուցվածքը նաև գիտական գեղեցիկի բազմազանությունների միասնականության հատկանիշի ավե-

լի լայն դրսևորման հնարավորություն է ստեղծում: Այս բոլորը ցույց են տալիս նման մոտեցման գեղագիտական ավելի մեծ գրավչությունը:

Նմանությունը և գեղագիտական արժեքնրի ձևավորումը: Նմանությունը երկրաչափության դասընթացի կառուցման կարևոր մոտիվներից մեկն է: Սակայն հարկ է նշել, որ այստեղ երկրաչափական մոտեցումը տարբերվում է նմանության առօրեական ընկալումից և դրա մաթեմատիկական մեկնաբանությունից: Վերջին ընկալումը հենված է միայն երկու հատկությունների վրա. յուրաքանչյուր առարկա նման է ինքն իրեն, և եթե մի առարկա նման է մյուսին, ապա այդ մյուսը իր հերթին, նման է առաջինին:

Ասվածից հետևում է, որ առարկաների միջև նմանության առնչությունը կարող է և փոխանցական չլինել, այսինքն՝ առաջին առարկան կարող է նման լինել երկրորդին, երկրորդը երրորդին, բայց առաջինը երրորդին կարող է և նման չլինել: Դա կարող է տեղի ունենալ այն դեպքում, երբ նշված նմանությունները կատարվում են ըստ տարբեր հատկանիշների: Օրինակ, ծնողներից երկուսն էլ կարող են նման լինել իրենց զավակին, բայց իրար նման չլինել. մեկին նման է զավակի քիթը, մյուսին՝ աչքերը: Իսկ երկրաչափության մեջ գործածվող նմանության հասկացությունը օժտված է նաև փոխանցական հատկությամբ:

Նմանության այդպիսի ընկալումը օգնում է նաև արվեստի որոշ ստեղծագործությունների ճիշտ ընկալմանը, երբ վերջիններս փորձում են պահպանել իրենց ստեղծագործության բնօրինակի առանձին էական հատկանիշներ: Նման մոտեցումը հարազատ է կերպարվեստին, քանդակագործությանը, գրականությանը և արվեստի այլ տեսակներին:

Նմանության երկրաչափական հասկացությունը հենվում է նմանության ձևափոխության գաղափարի վրա: Հարթության երկու պատկերներ, օրինակ, կոչվում են նման, եթե գոյություն ունի այդ հարթության նմանության ձևափոխություն, որը պատկերներից մեկը արտապատկերում է մյուսին: Իսկ նմանության ձևափոխությունը հարթության այն f ձևափոխությունն է, որի համար հարթության կամայական A , B կետերը և նրանց A' , B' պատկերները բավարարում են $A'B' = |k|AB$ պայմանին, որտեղ k -ն տրված f ձևափոխության համար հաստատուն, ոչ գրոյական իրական թիվ է:

Նմանության այսպիսի ձևակերպումը բավականին բարդ է դպրոցական հասակի երեխաների համար: Այդ պատճառով երկրաչափության դպրոցական դասընթացում ուսումնասիրվում է միայն առանձին պատ-

կերների նմանությունը, ինչի համար հիմք է ծառայում Թալես Միլեթացու հայտնի թեորեմը, որը հնարավորություն է տալիս կապ հաստատել նման եռանկյունների անկյունների և կողմերի միջև. նման եռանկյունները այն եռանկյուններն են, որոնց անկյունները հավասար են, իսկ համապատասխան կողմերը՝ համեմատական: Վերջին հանգամանքը լայնորեն օգտագործվում է ինչպես երկրաչափության կիրառություններում, այնպես էլ կերպարվեստում և քանդակագործության մեջ, և գեղագիտական գրավչություն է հաղորդում երկրաչափության ծրագրային նյութի ուսուցմանը:

6. Անալոգիայի գեղագիտական գրավչությունը մաթեմատիկական կրթության մեջ

Անալոգիան մտածողության հնարք է, մտահանգման եղանակ, իմացության մեթոդ, որ կիրառվում է իրար նման, ընդհանուր հատկություններով օժտված առարկաներից կամ երևույթներից մեկի մասին դատողություններ կատարելու համար, ելնելով մյուսի մասին եղած դատողություններից: Անալոգիայի միջոցով մենք աշխատում ենք մի առարկայի մասին ունեցած տեղեկությունը տարածել մյուսի վրա՝ հաշի առնելով նրանց որոշ հատկությունների ընդհանրությունը:

Ավանդական տրամաբանության մեջ անալոգիան իրականացվում է հետևյալ սխեմայով.

Պայմանները.

ա. A առարկան ունի a, b, c հատկությունները:

բ. B առարկան ունի a, b հատկությունները:

Եզրակացությունը.

Հավանական է, որ B առարկան նույնպես ունի c հատկությունը:

Այն դեպքում, երբ եզրակացության հավանականությունը 1 է, այսինքն՝ այն հավաստի է, անալոգիան կոչվում է ճշգրիտ, հակառակ դեպքում անալոգիան կոչվում է ոչ ճշգրիտ: Իսկ երբ եզրակացության հավանականությունը 0 է, այսինքն՝ այն կեղծ է, անալոգիան նույնպես կոչվում է կեղծ: Ոչ ճշգրիտ անալոգիայով արված եզրահանգումների միջոցով ստացված դատողությունները անվանվում են նաև ճշմարտանման դատողություններ (տես [78]):

Անալոգիայի դերը լավագույնս բնութագրել է հանրահայտ մաթեմատիկոս և մանկավարժ Դյորդ Պոյան. «Հավանաբար ինչպես տարրական, այնպես էլ բարձրագույն մաթեմատիկայում, միգուցե նաև ցանկացած այլ բնագավառում, չկա հայտնագործություն, որ կատարված լինի առանց անալոգիայի» (տես [155]):

Դ. Պոյան [155], Ա. Ի. Ուեմովը [203] և ուրիշներ ընդգծում են անալոգիայի կարևոր դերը՝ որպես գիտական իմացության գործիք. այն լայնորեն կիրառվում է բոլոր գիտություններում: Անալոգիան կիրառվում է նաև արվեստում և կրոնում: Արվեստում, օրինակ, ռճերի, դպրոցների ընդհանրությունը նաև ստեղծագործությունների ընդհանրություն է, որ առաջանում է անալոգիայի կիրառման շնորհիվ: Բայց եթե արվեստում, ինչպես նաև կրոնում և գիտությունների մեծ մասում՝ անալոգիայի կիրառման արդյունքը չունի հստակ արտահայտություն, չի ենթարկվում տրամաբանության կանոններին, ապա նրա մաթեմատիկական կիրառությունը հանգեցնում է հստակ, տրամաբանորեն հիմնավորված արդյունքների, ինչի մեջ էլ դրսևորվում են գիտական գեղեցիկի հատկանիշները և դրանց բերած գեղագիտական գրավչությունը:

Անալոգիայի կիրառումը ընդգրկում է մի շարք բաղադրիչներ, որոնցից հիմնականներն են երևույթի վերլուծությունը, համեմատվող առարկաների առանձնացումը, վարկածի առաջադրումը, նրա հաստատումը կամ հերքումը: Ընդ որում, անհրաժեշտ է նկատի ունենալ, որ անալոգիան ոչ թե ինչ-որ ալգորիթմով ընթացող, այլ ստեղծագործական գործընաց է, ինչը լրացուցիչ գեղագիտական գրավչություն է հաղորդում նրա կիրառությանը:

Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում անալոգիայի կիրառման հիմնահարցը հանգամանորեն ուսումնասիրել են Պ. Մ. Էրդինիեր [244], և Ն. Բ. Իստոմինան [103] և այլ հետազոտողներ, որոնք նշում են նրա կարևորությունը: Անալոգիան օգտագործվում է հանրակրթության մաթեմատիկայի ուսուցման ողջ գործընթացում՝ դպրոցական առաջին տարիներից մինչև վերջինը: Ընդ որում, նրա դերը ավելանում է սովորողների ինտելեկտուալ ունակությունների մեծացմանը զուգընթաց: Սակայն Ն. Մ. Միզովան գտնում է, որ անալոգիայի կիրառումը մեծ մասամբ կրում է տարերային բնույթ, և առաջադրում է սովորողների կողմից այդ մեթոդի տիրապետման և ուսուցման գործընթացում այն ինքնուրույն օգտագործելու կամ կիրառելու հարցը, տալիս է դրա լուծման ուղիներ (տես [183], էջ 24-29):

Անալգիայի մեթոդի կիրառման/ձևավորման հիմնախնդիրը կապված է սովորողների մտավոր զարգացման, ինքնավերահսկման, ուսուցանվող երևույթների համակարգման, վարկածների առաջադրման և ուսումնական գործունեության այլ գործոնների հետ [184]:

Անալոգիան կիրառվում է մաթեմատիկական մտածողության բոլոր հիմնական ձևերում՝ հասկացությունների սահմանումների կատարման, թեորեմների ստացման և ապացուցման, խնդիրների առաջադրման և լուծման գործընթացներում:

Մաթեմատիկական հասկացությունների սահմանման գործընթացում անալոգիան դրսևորվում է հետևյալ կերպ: Դիցուք առարկաների մի դասում սահմանված է P հասկացությունը, որի համար բնութագրական է U հատկությունը, և առարկաների մի այլ դասում ևս կարող է տեղի ունենալ այդ հատկությունը: Ելնելով այդ U հատկությունից՝ երկրորդ դասում մենք կարող ենք ներմուծել Q հասկացությունը, որը նույնպես օժտված է U հատկությամբ:

Պարզաբանենք ասվածը կոնկրետ օրինակի վրա: Հարթության մեջ սահմանվում է շրջանագծի հասկացությունը. շրջանագիծը հարթության բոլոր այն կետերի բազմությունն է, որոնք հավասարահեռ են տրված միևնույն կետից: Եթե հարթությունը նշանակենք L -ով, տրված կետը՝ O -ով, իսկ շրջանագծի կետերից մինչև O հեռավորությունը՝ r -ով, ապա շրջանագիծը $\{X \mid |OX| = r, X \in L\}$ բազմությունն է: O -ն կոչվում է այդ շրջանագծի կենտրոն, իսկ r -ը՝ նրա շառավիղ:

Այժմ L հարթությունը փոխարինենք V տարածությամբ: L -ի և V -ի նմանությունը ունի խորքային բնույթ. երկուսն էլ բնութագրվում են իրական վեկտորական տարածությունների միջոցով, առաջինը՝ երկչափ, երկրորդը՝ եռաչափ վեկտորական տարածությամբ: Դրանք ունեն նաև արտաքին նմանություններ. օրինակ, ինչպես առաջինում, այնպես էլ երկրորդում սահմանվում է երկու կետերի հեռավորության հասկացությունը, ինչը հիմք հանդիսացավ հարթության մեջ շրջանագծի սահմանման: Այժմ անալոգիայի միջոցով կատարենք հետևյալ հարցադրումը. Արդյոք չի՞ կարելի շրջանագծի հասկացության սահմանման նմանությամբ համապատասխան գաղափար ներմուծել նաև տարածության մեջ:

O կենտրոնով և r շառավիղով շրջանագծի $\{X \mid |OX| = r, X \in L\}$ սահմանման մեջ L -ը փոխարինենք V -ով: Կստանանք $\{X \mid |OX| = r, X \in V\}$ բազմությունը: Մնում է անուն տալ ստացված հասկացությանը: Այն անվանել են գնդաձև: Այսպիսով, գնդաձևը տարածության բոլոր այն

կետերի բազմությունն է, որոնք հավասարապես են տրված միևնույն կետից: Շրջանագծի հետ կապված հասկացությունների սահմանումների անալոգիայով Օ-ն անվանվում է գնդոլորտի կենտրոն, իսկ r -ը՝ նրա շառավիղ: Գնդոլորտի և նրա հետ կապված հասկացությունների սահմանման այս բնական ընթացքը չի վանում սովորողին, ընդհակառակը՝ այն ձգում է իր պարզությամբ, հստակությամբ և տրամաբանական հիմնավորվածությամբ և ունի որոշակի գեղագիտական գրավչություն:

Անալոգիան նաև վարկածների առաջադրման և թերեմների ստացման լայն հնարավորություն է ընձեռում: Դիտարկենք միայն նման ճանապարհներից մեկը, որ կապված է հետևյալ հարցադրման հետ. արդյո՞ք հասկացության այս կամ այն հատկությամբ օժտված է նաև այդ հասկացության անալոգիայով սահմանված հասկացությունը: Ասվածը լուսաբանենք՝ նորից դիմելով շրջանագծի և նրա անալոգիայով սահմանված գնդոլորտի հասկացություններին: Հանրահայտ են շրջանագծի հետևյալ հատկությունները.

Շրջանագծի հետ միևնույն հարթության մեջ գտնվող ուղիղը, որի հեռավորությունը շրջանագծի կենտրոնից.

(1) մեծ է շրջանագծի շառավղից՝ չի հատվում շրջանագծի հետ,

(2) հավասար է շրջանագծի շառավղին՝ շրջանագծի հետ ունի մեկ ընդհանուր կետ,

(3) փոքր է շրջանագծի շառավղից՝ հատվում է շրջանագծի հետ մեկից ավելի կետերում,

(4) փոքր է շրջանագծի շառավղից՝ հատվում է շրջանագծի հետ երկու կետում:

Այս պնդման մեջ հարթությունը փոխարինելով տարածությամբ, իսկ ուղիղը՝ հարթությամբ, կարող ենք անալոգիայի միջոցով առաջադրել հետևյալ վարկածը.

Հարթությունը, որի հեռավորությունը գնդոլորտի կենտրոնից.

(1) մեծ է գնդոլորտի շառավղից՝ չի հատվում գնդոլորտի հետ,

(2) հավասար է գնդոլորտի շառավղին՝ գնդոլորտի հետ ունի մեկ ընդհանուր կետ,

(3) փոքր է գնդոլորտի շառավղից՝ հատվում է գնդոլորտի հետ մեկից ավելի կետերում,

(4) փոքր է գնդոլորտի շառավղից՝ հատվում է գնդոլորտի հետ երկու կետում:

Այս վարկածի հետագա ուսումնասիրությունը ցույց է տալիս, որ 1, 2 և 3 պնդումները ճշմարտություններ են, իսկ 4-ը՝ ոչ: Այս օրինակը ցույց է տալիս նաև, որ անալոգիայով ստացված դատողությունները միշտ չէ, որ ճշմարտություններ են: Այսինքն՝ անալոգիան տալիս է միայն վարկածներ առաջադրելու հնարավորություն, վարկածներ, որոնց ճշմարտության հարցի լուծումը կարիք ունի հետագա պարզաբանումների:

Դիտարկենք ևս մեկ օրինակ: Չնայած քառակուսին հարթ պատկեր է, իսկ խորանարդը՝ տարածական մարմին, բայց ակնհայտ է դրանց նմանությունը: Ինչու մն է դրսևորվում այն: Երկուսում էլ բոլոր հնարավոր անկյունները ուղիղ են, եթե քառակուսու բոլոր կողմերն են իրար հավասար, ապա իրար են հավասար խորանարդի բոլոր կողերը և բոլոր նիստերը: Բացի այդ, խորանարդի կազմավորման մեջ լայնորեն մասնակցում է քառակուսին. նրա բոլոր նիստերը քառակուսիներ են: Ընդհանրությունների այս լայն ցանկը մեզ մղում է անալոգիայի՝ նոր ընդհանրություններ գտնելու, ավելի ճիշտ, ավելի պարզ ու մեզ ավելի ծանոթ քառակուսու հատկությունների միջոցով խորանարդի հատկությունների բացահայտման: Կատարենք նման մի քանի դատողություն:

ա. Քառակուսու անկյունագծերը հատման կետում կիսվում են: Արդյո՞ք խորանարդի անկյունագծերը նույնպես հատման կետում չեն կիսվում:

բ. Ի տարբերություն քառակուսու, խորանարդն ունի չորս անկյունագիծ: Հետևաբար առաջ է գալիս նոր հարցադրում. արդյո՞ք այդ անկյունագծերը չեն հատվում մի կետում:

գ. Քառակուսու անկյունագծի քառակուսին հավասար է կողմի քառակուսու կրկնապատիկին: Կարելի՞ է և ինչպե՞ս այս հատկությունը տարածել խորանարդի վրա:

Այսպիսով, անալոգիայի կիրառումը մեզ հնարավորություն է տալիս քառակուսու միջոցով ուսումնասիրել խորանարդը, առաջադրել վարկածներ և հայտնաբերել նրա հատկությունները: Ահա առաջադրվող մի քանի վարկածներ.

- խորանարդի անկյունագծերը հատվում են մի կետում,
- խորանարդի անկյունագծերը չեն հատվում մի կետում,
- խորանարդի անկյունագծերը հատման կետում կիսվում են,
- խորանարդի անկյունագծի քառակուսին հավասար է նրա կողի քառակուսու կրկնապատիկին,
- խորանարդի անկյունագծի քառակուսին հավասար է նրա կողի քառակուսու եռապատիկին:

Անշուշտ, այս ցանկը կարելի է շարունակել: Հետագա ուսումնասիրությունները ցույց են տալիս, որ առաջադրված վարկածներից առաջինը, երրորդը և վերջինը ճշմարիտ են, իսկ երկրորդը և չորրորդը՝ կեղծ:

Անալոգիայի միջոցով դատողությունների իրականացումը ստեղծագործական գործընթաց է: Այն կարող է հանգեցնել նաև սխալ վարկածների (ինչպես դիտարկված օրնակում): Բայց սա չպետք է վախեցնի աշակերտին. առօրյա կյանքում առաջացած հարցերի լուծման մեջ նույնպես անալոգիայի միջոցով կատարված դատողությունները, վարկածները կարող են սխալ լինել. դրանից անհնար է խուսափել: Կարևորը առարկաների հատկությունները, դրանց ընդհանրությունը տեսնելն է, անալոգիան կիրառելը և վարկածների ստացումը, նաև դրանք անվերապահորեն ճշմարտության տեղ չընդունելը, դրանց հերքելու կամ հաստատելու, ապացուցելու անհրաժեշտության գիտակցությունը, պատրաստակամությունը և համապատասխան կարողությունը ունենալը: Իսկ մաթեմատիկան սովորեցնում է նման գործունեությունների իր հրաշալի օրինակների միջոցով:

Միաժամանակ, անալոգիայի միջոցով ստացված դատողությունների վարկածային բնույթը, դրանց հետագա ստուգման անհրաժեշտությունը կարող է մեծացնել սովորողների հետաքրքրությունը ուսումնասիրվող նյութի նկատմամբ, իրականացվող գործընթացին հաղորդել լրացուցիչ գրավչություն:

Անալոգիան նաև վարկածների հաստատման կամ հերքման և թերեմների ու նրանց առանձին հատվածների ապացուցման ճանապարհ է: Ինչ վերաբերում է վերջին գործառույթին, ապա այստեղ անալոգիան թույլ է տալիս թերեմում հանդես եկող ակնհայտորեն իրար նման կամ միևնույն դերը կատարող երկու հասկացություններից մեկի որևէ հատկության ապացուցումը նաև մյուսին վերագրել: Օրինակ, եռանկյան անկյան կիսորդի մասին թերեմը մենք ապացուցում ենք միայն նրա անկյուններից մեկի համար, իսկ մյուսների վերաբերյալ համանման դատողությունները համարում ենք ապացուցված՝ հենվելով անալոգիայի մեթոդի վրա:

Հարկ է նշել, որ այստեղ միշտ չէ, որ անալոգիայի մեթոդը կարող է օգնել: Երբեմն դիտարկվող հասկացություններից մեկը օժտված է լինում լրացուցիչ առանձնահատկություններով, որոնք փոխում են դատողությունների ընթացքը և խոչընդոտում են անալոգիայի դրսևորմանը: Օրինակ, կոսինուսների թերեմի ապացուցման ընթացքում անալոգիայի մեր

նշած ճանապարհը լիովին կիրառելի է սուրանկյուն եռանկյունների համար: Սակայն ուղղանկյուն կամ բութանկյուն եռանկյունների դեպքում երկու սուր անկյունների համար ստացված ապացուցումները նման են իրար և անալոգիան կիրառելի է, իսկ մյուս՝ ուղղանկյան կամ բութանկյան դիտարկման դեպքում, ապացուցման համար կառուցվող գծագրերը տարբերվում են սուրանկյան ապացուցման համար կառուցված գծագրից, և անալոգիան այստեղ չի «աշխատում»:

Անալոգիայի կիրառման ճանապարհը թեորեմի ապացուցումը ազատում է ավելորդ դատողություններից, թեթևացնում է այն, մտցնում է պարզություն, հանգամանքներ, որոնք գիտական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշներ են և ուսուցմանը կարող են հաղորդել գեղագիտական գրավչություն:

7. Գիտական իմացության մեթոդների զուգակցումը

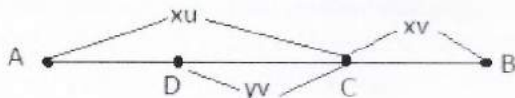
Գիտական իմացության մեթոդները հանդես են գալիս մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի տարբեր փուլերում: Սովորաբար մինևույն թեորեմի ապացուցման կամ խնդրի լուծման ընթացքում անհրաժեշտ է լինում օգտվել տարբեր մեթոդներից, զուգակցել դրանք, երբեմն միևնույն մեթոդը կիրառել մի քանի անգամ և այլն: Ասվածը ցուցադրենք մեկ օրինակի վրա: Լուծենք հետևյալ խնդիրը:

A և B վայրերից իրար հանդեպ, համապատասխանաբար u և v ($u > v$) արագություններով, շարժվում են երկու ավտոմեքենաներ: Ընդ որում, առաջինը հասնում է B և անմիջապես հետ է վերադառնում և հասնում երկրորդին՝ մինչև վերջինիս A հասնելը: Որքա՞ն ժամանակից հետո տեղի կունենան ավտոմեքենաների առաջին հանդիպումը, և որքա՞ն ժամանակ հետո՝ երկրորդ հանդիպումը, եթե վայրերի միջև հեռավորությունը s է:

Լուծումը: Նախ կատարենք խնդրի նախնական վերլուծությունը. ի՞նչ է տրված: Ունենք՝

A և B վայրերի հեռավորությունը	s
Առաջին՝ A-ից դուրս եկած մեքենայի արագությունը	u
Երկրորդ՝ B-ից դուրս եկած մեքենայի	v

արագությունը	
Առաջին ավտոմեքենայի արագությունը մեծ է երկրորդի արագությունից	$u > v$



A և B վայրերը պատկերենք կետերի տեսքով, իսկ նրանց միջև ընկած ճանապարհը՝ AB հատվածի տեսքով (տես գծագիրը): Քանի որ մեզ անհրաժեշտ է որոշել ավտոմեքենաների շարժումը սկսելու պահից մինչև հանդիպումները նրանց ծախսած ժամանակները, ապա բնական կլինի նշել նաև հանդիպման վայրերը: Դիցուք առաջին հանդիպման վայրը C-ն է, երկրորդ հանդիպման վայրը՝ D-ն: Եթե ենթադրենք նաև, որ առաջին հանդիպումը տեղի է ունեցել ավտոմեքենաների դուրս գալուց x ժամանակ անց, իսկ երկրորդ հանդիպումը՝ առաջին հանդիպումից y ժամանակ անց, ապա այդ ընթացքում ավտոմեքենաների անցած ճանապարհները կարտահայտվեն գծագրում նշված մեծություններով:

Այժմ համադրենք կատարված վերլուծության արդյունքները: Պարզ է, որ $xu + xv = s$: Հետևաբար՝ $x = \frac{s}{u+v}$: Այսպիսով, մենք հեշտությամբ որոշեցինք առաջին հանդիպման համար անրաժեշտ ժամանակը՝

$$\frac{s}{u+v}:$$

Կատարենք ևս մեկ վերլուծություն. C կետից D հասնելու համար առաջին ավտոմեքենան անցնում է CB ճանապարհի կրկնապատիկը և CD ճանապարհը և, ըստ ենթադրության, այն դրա համար ծախսում է y ժամանակ: Ուրեմն, նշված ժամանակում կանցնի yu ճանապարհ: Այդ տվյալների համադրումից կստանանք՝ $yu = 2xv + yv$ կամ $y = \frac{2xv}{u-v}$: Բայց մենք ունենին նաև $x = \frac{s}{u+v}$: Համադրելով այս հավասարությունը նախորդի հետ մենք կստանանք՝ $y = \frac{2sv}{u^2 - v^2}$:

Հաջորդ վերլուծությունը թույլ է տալիս նկատել, որ ավտոմեքենաների երկրորդ հանդիպումը տեղի է ունեցել նրանց դուրս գալուց $x + y$

ժամանակ անց: Կատարելով ստացված արդյունքների նոր համադրում, կստանանք՝

$$x + y = \frac{2sv}{u^2 - v^2} + \frac{s}{u+v} = \frac{s}{u-v}:$$

Այսինքն՝ երկրորդ հանդիպման համար անհրաժեշտ ժամանակն է

$$\frac{s}{u-v}:$$

Բայց խնդրի լուծումը կամ մեր հետազոտությունը այստեղ կանգ չի առնում: Նկատենք, որ խնդրի տվյալները տրված են ընդհանրական՝ տառերի տեսքով, և թվում է, թե խնդիրը ստացել է իր լուծումը ներգրավված տառերի բոլոր թվային արժեքների համար: Օգտվելով զիտական իմացության կոնկրետացման մեթոդից, դիտարկենք այդ տառերի կոնկրետ թվային արժեքներ: Դիցուք՝ $u = 6$ կմ/ժ, $v = 5$ կմ/ժ, $s = 11$ կմ:

Այդ դեպքում C կետում ավտոմեքենաների առաջին հանդիպումը տեղի կունենա 1 ժամ հետո: Երկրորդ ավտոմեքենային մինչև A հասնելու համար կմնա անցնել ևս 6 կմ, ինչը այն կանի $6/5$ ժամում: Իսկ առաջին մեքենան C -ից մինչև B կգնա և կվերադառնա $10/6$ ժամում: Բայց ակնհայտ է, որ $6/5 < 10/6$: Հետևաբար, առաջին ավտոմեքենան չի կարող հասնել երկրորդին՝ մինչև նրա A հասնելը: Ո՞րն է խնդիրը:

Բանն այն է, որ մեր սկզբնական վերլուծությունը մենք կատարեցինք որոշ թերություններով՝ ոչ լրիվությամբ: Խնդրի լուծման համար անհրաժեշտ էր, որ առաջին ավտոմեքենան երկրորդին երկրորդ անգամ հանդիպելու համար պետք է նրան հասներ մինչև վերջինիս A կետ հասնելը: Ահա այս պայմանը մենք հաշվի չենք առել: Իսկ դրա իրականացման համար պետք է երկրորդ հանդիպման վայրը՝ D -ն ընկած լինի A և B կետերի միջև: Համադրելով մեր գրառումները, կտեսնենք, որ վերջինս տեղի կունենա, եթե $\frac{s}{u-v} \cdot v < s$, կամ $v < \frac{u}{2}$:

Այս անհավասարումը համադրելով մեր ստացած արդյունքների հետ, կստանանք խնդրի վերջնական պատասխանը.

ա. Առաջին հանդիպումը տեղի կունենա $\frac{s}{u+v}$ ժամանակից հետո:

բ. Երկրորդ հանդիպումը կկայանա, եթե $v < \frac{u}{2}$, և հանդիպումը տեղի կունենա $\frac{s}{u-v}$ ժամանակից հետո:

Այժմ նորից անդրադառնանք կոնկրետացման՝ վերևում բերված օրինակին: Բնականաբար այն չի բավարարում $v < \frac{u}{2}$ պայմանին, և չի հանդի-

սանում խնդրի լուծում (այն կոնկրետացումն է այն խնդրի, որում չի պահանջվում երկրորդ հանդիպումը մինչև երկրորդի A վայրը հասնելը):

Խնդրի լուծման ողջ ընթացքը հագեցված էր ինտելեկտուալ որոնման, գտնելու, հայտնաբերելու, ջանքեր գործադրելու գեղագիտական գործողություններով, որոնց միջոցով դրսևորվում էին գեղեցիկի համապատասխան հատկանիշները և պայմանավորում լուծման գեղագիտական գրավչությունը: Բայց լուծմանը առանձնահատուկ հմայք է հաղորդում երկրորդ պատասխանի անսպասելիությունը, պարզությունը և առաջին պատասխանի հետ նրա համաչափությունը. այն ստացվում է առաջինից՝ նրանում հայտարարի + նշանը - նշանով փոխարինելով:

§2. ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐԻ ԳԵՂԱԳԻՏԱԿԱՆ ԳՐԱՎՉՈՒԹՅՈՒՆԸ

Գիտության մեթոդը խիզախ, հանդուգն են-
թադրությունների և դրանց հերքման ստեղ-
ծագործական ու համարձակ փորձերի ճա-
նապարհ է:

Կարլ Պոպեր

Ուսուցման յուրաքանչյուր մեթոդ նպատակաուղղված է ինչպես սովո-
րողի գիտելիքների և կարողությունների ձեռքբերմանը, այնպես էլ նրա
դաստիարակությանը, արժեհամակարգի և արժեքային կողմնորոշման
ձևավորմանը: Գոյություն ունեն ուսուցման տարբեր մեթոդներ, որոնց
դասակարգման համար կիրառվում են տարբեր մոտեցումներ: Մաթեմա-
տիկայի ուսուցման ժամանակակից բազմաթիվ մեթոդների շարքում
առանձնացվում են աքսիոմատիկ, էվրիստիկական, ծրագրավորված
ուսուցման, պրոբլեմային ուսուցման, մաթեմատիկական մոդելավորման
և այլ մեթոդներ: Դրանց բոլորի կիրառման ընթացքը կարելի է ուղղորդել
նաև դեպի գեղագիտական արժեքներ՝ մաթեմատիկայի գեղագիտական
գրավչության բացահայտում, դեպի սովորողի գեղագիտական ունակու-
թյունների ձևավորում և զարգացում:

1. Աքսիոմատիկ մեթոդը

Մարդկային էության դրսևորման ամենաբարձր հատկանիշների՝ նրա
մտքի ուժի, ճշմարտացիության և գեղեցկության գլխավոր չափանիշներից
մեկը հստակությունն է: Իսկ մտքի հստակության ճանապարհը սկսվում է
«ինչից ինչ է ստացվում կամ հետևում» հարցադրումից, որն իրականում
մեկ քայլի վրա կանգ չի առնում և վերածվում է հարցադրումների շղթայի:
Հասկացությունների սահմանման, դատողությունների բխեցման, մտա-
հանգումների այդ շղթան կարող է երկար շարունակվել, բայց չի կարող
անվերջ հետ գնալ. ի վերջո, մենք ստիպված պետք է լինենք որոնել նրա
ակունքները: Ակունքների որոնման ընթացքի հանգուցալուծման գիտա-
կան ճանապարհը աքսիոմատիկ մեթոդն է՝ մաթեմատիկայի հետազոտ-
ման ամենահզոր մեթոդներից մեկը: Իսկ ո՞րն է աքսիոմատիկ մեթոդը:

Աքսիոմատիկ մեթոդի էությունը մոտավորապես կարելի է ներկայացնել այսպես: Ինչ-որ տեսություն կառուցելու համար առանց սահմանման ընդունվում են որոշ ելակետային, նախնական հասկացություններ, իսկ մնացած հասկացությունները սահմանվում են այդ նախնական հասկացությունների միջոցով: Ելակետային են համարվում նաև որոշ դոտորություններ, որոնք կոչվում են աքսիոմներ, իսկ մնացած դոտորությունները (մաթեմատիկայում դրանք կոչվում են թեորեմներ) տրամաբանական կանոնների կամ օրենքների միջոցով (դրանք էլ կոչվում են տեսության արտածման կանոններ) բխեցվում են այդ աքսիոմներից: Աքսիոմներից թեորեմների բխեցման ընթացքը կոչվում է թեորեմի ապացուցում: Աքսիոմները համարվում են ճշմարտություններ, իսկ թեորեմների ապացուցումն էլ երաշխավորում է նրանց ճշմարտացիությունը: Ահա այս ձևով կառուցված մաթեմատիկական տեսությունները կոչվում են դեդուկտիվ կամ աքսիոմատիկ տեսություններ, իսկ նման տեսությունների կառուցման, նրանցում թեորեմների ապացուցման մեթոդները անվանում են աքսիոմատիկ մեթոդներ:

Եթե հետևենք Պոլ Լոկհարդին և մաթեմատիկան անվանենք ապացուցման արվեստ, ապա աքսիոմատիկ մեթոդը մաթեմատիկայի կառուցման, նրա ճարտարապետության այն ոճն է, որտեղ ավելի հստակ է դրսևորվում մաթեմատիկայի գեղարվեստական էությունը: Եվ գիտական գեղեցիկի այնպիսի հատկանիշներ, ինչպիսիք են կարգը, տրամաբանական խստությունը, հստակությունը, պարզությունը, բազմազանությունների միասնականությունը և ընդհանրությունը, աքսիոմատիկ մեթոդի մեջ գտնում են իրենց լիարժեք արտահայտությունը:

Աքսիոմատիկ տեսության կարևոր տարրերից մեկը մոդելի գաղափարն է: Տեսության մոդելը կամ մեկնաբանությունը մաթեմատիկական առարկաների, հասկացությունների և նրանց հատկությունների այնպիսի օրինակ է, որում տեղի ունեն (մեկնաբանվում են) այդ տեսության բոլոր հասկացությունները և աքսիոմները: Հետաքրքիրն այստեղ այն է, որ միևնույն տեսությունը կարող է ունենալ բազմապիսի մոդելներ, որոնցից յուրաքանչյուրում իրավացի են նաև տեսության բոլոր թեորեմները, որոնք արդեն կարիք չունեն ապացուցման. տեսության մեջ ապացուցված յուրաքանչյուր թեորեմ իրավացի է նրա բոլոր մեղեկներում: Այսպիսով, աքսիոմատիկ տեսության և նրա մոդելների դիտարկման ընթացքը ուղեկցվում է գիտական գեղեցիկի՝ բազմազանությունների միասնականության և ընդհանրության հատկանիշների ինչպես արտաքին, այնպես էլ

խորքային դրսևորումներով: Ցուցադրենք ասվածը աքսիոմատիկ տեսության պարզագույն և անչափ կարևոր խմբերի տեսության օրինակով: [25]-ում մենք բերեցինք խմբի սահմանումը: Այս աշխատանքի ընթերցման անկախությունը ապահովելու համար նորից բերենք այդ սահմանումը:

Վեցենք կամայական G բազմություն և նրա տարրերի նկատմամբ սահմանենք մեկ երկտեղ գործողություն. որը G բազմության տարրերի կամայական (x, y) կարգավորված գույզին առնչում է այդ բազմության մեկ և միայն մեկ z տարր: Պարզ է, որ եթե մեր սահմանած գործողությունը նշանակենք $*$ նշանով, ապա z տարրը միարժեքորեն պայմանավորված է (x, y) կարգավորված գույզով և $*$ գործողությամբ, և այն կարող ենք նշանակել $x * y$ տեսքով: Այսպիսով՝ $z = x * y$: Պահանջենք նաև, որ $*$ -ը բավարարի երեք պայմանների (աքսիոմների).

ա. Այն լինի գույզողական, այսինքն՝ G -ի կամայական x, y և z տարրերի համար տեղի ունենա $(x * y) * z = x * (y * z)$ հավասարությունը:

բ. G -ում գոյություն ունենա չեզոք տարր, այնպիսի e տարր, որի և G -ի կամայական x տարրի համար տեղի ունենա $x * e = e * x = x$ հավասարությունը:

գ. G -ի կամայական x տարր ունի հակադարձ, այնպիսի y տարր, որ տեղի ունենա $x * y = y * x = e$ հավասարությունը:

Ահա եթե մեզ հաջողվել է իրականացնել նշված գործընթացը, ապա G -ն կոչվում է խումբ $*$ գործողության նկատմամբ:

Խմբերի մոդելները բազմազան են և մեծ կիրառություն ունեն ինչպես մաթեմատիկայում, այնպես էլ բազմաթիվ բնական գիտությունների մեջ: Դրանց մի տեսակը՝ երկրաչափական պատկերների համաչափությունների խմբերը, մենք օգտագործել ենք խաչքարերը ուսումնասիրելիս (տես [25]): [25]-ում նշել ենք օրինակների ևս երկու տեսակ:

ա. Ամբողջ, ռացիոնալ, իրական և կոմպլեքս թվերի Z, Q, R, C բազմությունները խումբ են կազմում գումարման $+$ գործողության նկատմամբ: Դրանք կոչվում են գումարային խմբեր: Բոլոր այս խմբերում չեզոք տարրը 0 թիվն է, իսկ x թվի հակադարձը նրա հակադիրն է՝ $-x$ թիվը:

բ. Խումբ են կազմում նաև Q^*, R^*, C^* բազմությունները բազմապատկման գործողության նկատմամբ, որտեղ $Q^* = Q - \{0\}$, $R^* = R - \{0\}$, $C^* = C - \{0\}$: Մրանք կոչվում են արտադրյալային խմբեր: Այս խմբերում էլ չեզոք տարրը 1 թիվն է, իսկ x թվի հակադարձը՝ $1/x$ թիվը:

Այժմ փորձենք պարզել հետևյալ հարցը. արդյո՞ք գումարային խմբերում կամայական թվի հակադիրը միակն է, կամ արդյո՞ք արտադրյալա-

յին խմբերում թվի հակադարձը միակն է: Նույն հարցադրումը կարելի է անել համաչափությունների և կամայական այլ խմբի համար: Եվ բնական է, որ հարցադրման պատասխանը ստանալու համար մենք պետք է յուրաքանչյուր խմբի համար կատարենք առանձին դատողություններ և ստանանք համապատասխան ապացուցումը: Սակայն պարզվում է, որ դրա կարիքը չկա: Ուղղակի բավական է ապացուցել, որ խմբերի քսիոմմատիկ տեսության մեջ խմբի յուրաքանչյուր տարրի հակադարձը միակն է, որից էլ կհետևեն առանձին խմբերից կամ խմբի մոդելներից յուրաքանչյուրի մեջ մեր առաջադրած հարցի պատասխանը:

Պարզենք վերջին հարցը: Դիցուք G խմբի x տարրի հակադարձներն են y և z : Այսինքն՝ $x * y = y * x = e$, $x * z = z * x = e$: Այդ դեպքում մենք կունենանք՝ $y = y * e = y * (x * z) = (y * x) * z = e * z = z$, որտեղից էլ կստանանք $y = z$: Այսինքն՝ իսկապես խմբի յուրաքանչյուր տարրի հակադարձը միակն է, և արդեն կարիք չկա այս փաստի ապացուցումը կատարել մեր նշած կամ որևէ այլ խմբում: Նկատենք, որ a տարրի հակադարձը ընդունված է նշանակել a^{-1} տեսքով (ինչպես իրական թվերի արտադրյալային խմբում):

Դիտարկենք մեկ այլ արդեն՝ մեր ուսուցիչների սիրած խնդիր: Լուծենք $a + x = b$ և $ax = b$ հավասարումները: Առաջին խնդիրը դիտարկվենք իրական թվերի գումարային, իսկ երկրորդը՝ արտադրյալային խմբում: Հասկանալի է, որ դրանք առանձին խնդիրներ են և նման խնդիր կարելի է լուծել ցանկացած կոնկրետ խմբում: Բայց դիտարկենք ընդհանուր դեպքը՝ G խումբը $*$ գործողության նկատմամբ, և նրանում $a * x = b$ հավասարումը:

Դժվար չէ ցույց տալ, որ $a^{-1} * b$ -ն այդ հավասարման լուծում է: Իսկապես, տեղադրենք այն x -ի փոխարեն $a * x = b$ հավասարման մեջ, կստանանք՝ $a * (a^{-1} * b) = (a * a^{-1}) * b = e * b = b$: Մյուս կողմից, եթե x -ը $a * x = b$ հավասարման լուծում է, ապա կունենանք՝ $a * (a * x) = b$, $(a^{-1} * a) * x = a^{-1} * b$, $e * x = a^{-1} * b$, $x = a^{-1} * b$: Հետևաբար, տրված $a * x = b$ հավասարումը G խմբում ունի միակ՝ $x = a^{-1} * b$ լուծումը:

Այս ընդհանուր լուծումը ստանալուց հետո այլևս կարիք չկա կոնկրետ խմբերից յուրաքանչյուրում լուծել համապատասխան հավասարումը. բավական է օգտվել ընդհանուր դեպքից: Մասնավորապես, իրական թվերի գումարային խմբում $a + x = b$ հավասարման լուծումը կլինի $x = -a + b$, իսկ իրական թվերի արտադրյալային խմբում $ax = b$ հավասարման լուծումը կլինի $x = a^{-1} \cdot b$:

Մրանք արքսիոմատիկ մեթոդի՝ առաջադրված հարցերին ընդհանրական մոտեցում ցույց տալու պարզագույն օրինակներ են: Բնականաբար, մոտեցումը ունի նաև շատ ավելի բարդ ու խորքային դրսևորումներ:

Արքսիոմատիկ մեթոդը, նրա միջոցով արքսիոմատիկ տեսության կառուցումը միաժամանակ մաթեմատիկական հստակ լեզվի կառուցման գործընթաց է, ինչը իր հետ բերում է նաև այդ լեզվին ու նրա կիրառություններին բնորոշ գեղագիտական տարրեր: Հարկ է նշել, որ այս մեթոդի կիրառման ընթացքում ավելի է ընդգծվում գեղագիտականը՝ շնորհիվ գիտական գեղեցիկի բազմազանությունների միասնության, ընդհանրականության, հստակության, պարզության և տրամաբանական խստության օբյեկտիվ հատկանիշների լայն դրսևորման:

Մեթոդական գրականության մեջ դպրոցական դասընթացի շարադրանքում արքսիոմատիկ տեսության հնարավոր ներառման համար դրվում են հետևյալ պայմանները (տես [195]).

- գոյություն ունեն տեսության պարզ, հետաքրքիր մոդելներ, որոնց վրա հնարավոր է մեկնաբանել այդ տեսությունը,
- վերացական տեսության արդյունքների ներգրավումը թելադրվում է մոդելի ուսումնասիրության անհրաժեշտությամբ,
- արքսիոմների փոքր թվով հնարավոր է կառուցել տեսության առանձին հատվածներ՝ հետաքրքիր թեորեմների ներգրավումով,
- ապացուցումները բավականին պարզ են ու մատչելի:

Ավանդաբար, սկսած էվկլիդեսից, արքսիոմատիկ տեսության ուսումնասիրությունը կատարվում է երկրաչափության նյութի վրա: Սակայն երկրաչափության արքսիոմների համակարգը, ինչպես նշում է Ա. Ա. Ստոյարը (տես [195]), այս պայմաններին չի բավարարում: Նշենք նաև, որ երկրաչափական առարկաները դիտողական հնարավորություն ընձեռելու հետ միասին ունեն նաև ընկալման որոշակի դժվարություն, ինչը կապված է խորքային բարդությունների հետ: Դրանցից է, օրինակ, երկրաչափության հիմնական հասկացություններից մեկի՝ ուղղի ընկալման բարդությունը՝ կապված նրա անվերջության և անընդհատության հետ, որոնք չեն կարող լիարժեք ընկալվել՝ առանց արքսիոմատիկ տեսության ներգրավման: Այդ հատկությունների արքսիոմատիկ շարադրանքը սակայն չափազանց մեծ ծավալ կարող է զբաղեցնել և ամեննին նպատակահարմար չէ ուսուցման համար: Սակայն ուղղի այդ հատկությունները այս կամ այն ձևով, ուղղակի կամ անուղղակի մասնակցում են նրա այլ հատկությունների ուսումնասիրության ժամանակ: Այդ պատճառով ուսում-

նասիրությունը՝ առանց համապատասխան արքիմատիկ հիմնավորումների, դառնում է թերի: Ուրեմն՝ պետք է գտնել դպրոցական դասընթացում արքիմատիկ տեսության ուսումնասիրման համար այլ մոդելներ:

Տարբեր հեղինակներ այս նպատակի իրականացման համար առաջադրում են տարբեր տեսություններ՝ արելյան խմբերի, բուլյան հանրահաշիվների, փոքր չափողականության վելտորական տարածությունների տեսությունները: Հասկանալի է, որ նշված տեսությունների ուսումնասիրությունը դառնում է արհեստական՝ միայն արքիմատիկ մեթոդի ցուցադրման համար, իսկ դպրոցական մաթեմատիկայի ավանդական դասընթացին դրանք քիչ բան են տալիս: Միաժամանակ, փաստորեն, առաջարկվում են ծրագրային հիմնարար փոփոխություններ, որոնք սակայն կարող են հարուցել որոշակի դժվարություններ՝ կապված ուսուցման մեթոդիկայի մշակման, փորձարկման, ուսուցիչների վերապատրաստման և ուսումնամեթոդական այլ խնդիրների հետ:

Հանրակրթական դպրոցի հանրահաշվի [9]-[11] դասագրքերում մենք կառուցել ենք արքիմատիկ համակարգեր, որոնք բավարարելով վերը նշված պահանջներին, լուծում են նաև հետևյալ լրացուցիչ մանկավարժական-մեթոդական խնդիրները:

1) այդ համակարգերը՝ դրանց հիմնական բաղադրիչներով, արդեն ուսումնասիրվում են հանրահաշվի դպրոցական ավանդական դասընթացներում,

2) արքիմատիկ մեթոդի կիրառումը դրանց շարադրանքը դարձնում է ավելի հստակ, հասկանալի, համակարգված և, միաժամանակ, հնարավորություն է տալիս ներկայացնելու դեդուկտիվ մեթոդի էությունը,

3) արքիմատիկ մեթոդը դիտարկվել է կոնկրետ մոդելների վրա,

4) նշված տեսության օբյեկտները՝ գործողությունները, առնչությունները, բանաձևերը, արքիմոնները, արտածման կանոնները, թեորեմները և դրանց ապացուցումները ունեն ինտուիտիվ ընկալման պարզություն և կիրառական հիմնարար նշանակություն:

Դասընթացում նշված խնդիրներն իրականացվում են իրական թվերի կարգավորված դաշտի, մեծությունների կարգավորված մասնակի հանրահաշվի և ռացիոնալ կոտորակների դաշտի կոնկրետ մոդելների վրա:

Նշված դասընթացում հանրահաշվի տեսական նյութի շարադրանքը կրում է դեդուկտիվ բնույթ: Առկա են հիմնական հանրահաշվական հասկացությունները, որոնց միջոցով կառուցվում է հանրահաշվի լեզուն:

Առկա են աքսիոմները, որոնք այստեղ կոչվում են օրենքներ: Աքսիոմներից հետևում են թեորեմները, որոնք դասընթացում կոչվում են հատկություններ՝ յուրաքանչյուրը իր անվանմամբ ու իր ապացուցումով: Դասընթացում կիրառվում են ինչպես ավանդական, այնպես էլ ոչ ավանդական ապացուցումներ: Ապացուցումների ժամանակ օգտագործվող որոշ օրենքներ, ըստ էության, խաղում են արտաժաման կանոնների դեր, որոնք մեթոդական տեսակետից նպատակահարմար է այդպես էլ անվանել:

Միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացում աքսիոմատիկ մեթոդի կիրառությունը լիովին համապատասխանում է սովորողների տարիքային առանձնահատկությունների (տես [180]) և համահունչ է երկրաչափության դասընթացի աքսիոմատիկ կառույցի հետ:

Երկրաչափության դասընթացում դեդուկտիվ շարադրանքի վերացականության և տրամաբանական խստության հետ կապված դժվարությունների հաղթահարումը ապահովվում է երկրաչափական պատկերների դիտողականության հաշվին, ինչը նաև հնարավորություն է տալիս գեղեցիկի արտաքին լայն դրսևորումների: Պատահական չէ, որ շատ հեղինակներ մաթեմատիկայի արտաքին գեղագիտությունը հիմնականում առնչում են երկրաչափական ձևերի հետ (տես [86]):

Հանրահաշվի դասընթացում օբյեկտների ձևի հետ գեղեցիկի առնչության ցուցադրման հնարավորությունները մեծ չեն: Չնայած այստեղ նույնպես կան նման հնարավորություններ: Օրինակ, առնչությունների ռեֆլեքսիվության, համաչափության, հակահամաչափության, փոխանցականության և այլ հատկություններ, որոնք կիրառվում են հավասարությունների և անհավասարությունների ուսումնասիրության ընթացքում, արտաքին գեղեցիկի լիարժեք դրսևորումներ են: Այնուամենայնիվ, հանրահաշվի դասընթացը կոմպենսացնում է երկրաչափական ձևի հետ կապված արտաքին գեղագիտության հնարավորությունները այլ կողմերով:

Նախ, հանրահաշվում առաջին պլան է մղվում օբյեկտների ներքին գեղագիտությունը, ինչն արտահայտվում է հանրահաշվական գործողությունների և հիմնական բանաձևերի միջև առկա կապերի բազմազանությամբ:

Այնուհետև, հանրահաշիվն ունի կիրառելիության և գեղեցիկի համապատասխան հատկանիշի դրսևորման անհամեմատ ավելի լայն հնարավորություններ, քան երկրաչափությունը: Դրանք անշուշտ առաջին հերթին կապված են հանրահաշվի կիրառական ֆոնի հետ, ինչին մենք արդեն անդրադարձել ենք: Կապված աքսիոմատիկ մեթոդի հետ, այստեղ

քննարկենք մասնագետների շրջանում բավականին բանավեճի առիթ հանդիսացող մի խնդրի վրա: Անհրաժեշտ է, օրինակ, հանրահաշվի դասընթացում քննարկել զրոյի կամ մեկի միակության հարցը: Այն ներառված է [9] դասագրքում, և մասնագետներից շատերը ժամանակին տարակուսանք հայտնեցին այդ կապակցությամբ: Հիմնական պատճառաբանությունն այն էր, որ զրոյի կամ մեկի միակությունը աշակերտը գգում է կամ հասկանում է ինտուիտիվ մակարդակում և կարիք չկա քննարկել այդ հարցը: Բայց այդ դեպքում առաջանում է բնական հարցադրումը. իսկ կետից ուղղին իջեցրած ուղղահայացի միակությունը չունի՞ ինտուիտիվ ընկալման պարզություն, և նույնը չի՞ կարելի ասել կետից ուղղին տարված գուգահեռի մասին: Մանավանդ, ինչպես ցույց է տալիս ոչ էվկլիդեսյան երկրաչափության գոյությունը, այս վերջինը, չնայած իր ինտուիտիվ ընկալման պարզությանը, ամեննին էլ այդպես չի: Նույնը կարելի է ասել նաև զրոյի և միավորի մասին, որոնք հանրահաշվական տարբեր համակարգերում իրենց դրսևորում են տարբեր ձևերով, և այստեղ առաջացած խնդիրները ամեննին էլ ակնհայտ չեն:

Միևնույն ժամանակ հանրահաշվի դասընթացը ունի միակության խնդրի կիրառական պատկերման հրաշալի հնարավորություն, ինչն օգտագործված է [9] դասընթացում: Բերենք օրինակներ:

Խնդիր ([9], N362): Առանձնացրեք այն արտահայտությունները, որոնք որոշում են միակ առարկան.

ա. Մարդու ծնողը, հայրը, մայրը, քույրը:

բ. Դպրոցի աշակերտը, տնօրենը, ուսուցիչը:

գ. Մարդու ավտոմեքենան, ավտոմեքենայի վարորդը և այլն:

Այնուհետև այս խնդրին հաջորդում են ճանապարհի երկարության, հողամասի մակերեսի, ամանի տարողության, մարմնի ծավալի, օդի ջերմաստիճանի, առարկայի մեծության, երկու կետով անցնող ուղղի, շրջանագծի կենտրոնի, տրված կետից ուղղին տարված ուղղահայացի և գուգահեռի, տրված կետով անցնող ուղղի միակության վերաբերյալ հարցադրումներ և զուտ մաթեմատիկայի դասընթացում քննարկվող և մաթեմատիկական բովանդակությամբ կիրառական այլ խնդիրներ:

Ավելորդ չեմ համարում նշել, որ կիրառական այս հարցերի դիտարկումը ավելացնում կամ նոր գեղագիտական լիքք է հաղորդում մաթեմատիկայի դասին:

2. Պրոբլեմային ուսուցում

Մարդը իր գործունեությունը իրականացնելիս հաճախ առնչվում է խնդիրների, որոնք լուծելու համար անհրաժեշտ են լինում նոր գիտելիքներ և կարողություններ, հարկ է լինում ցուցաբերել ինքնուրույն, ստեղծագործական մոտեցումներ: Այդ պատճառով նրան պետք է սովորեցնել նման գործունեության, այսինքն՝ սովորեցնել մտածել և գործել ինքնուրույն: Նման գործունեության նախապատրաստման, սովորեցնելու, այն կազմակերպելու հիմնական միջավայրը, բնականաբար, պետք է դառնա հանրակրթական դպրոցը: Այստեղ ուսուցման կազմակերպման համապատասխան մեթոդը կոչվում է պրոբլեմային: Պրոբլեմային ուսուցման ընթացքում սովորողը ստանում է ոչ թե պատրաստի գիտելիքներ, այլ որոնում և գտնում է դրանք: Նման գործունեությունը ակտիվացնում է սովորողին, զարգացնում նրա մտածողությունը, ձևավորում հետաքրքրություն ուսուցանվող նյութի նկատմամբ, ուսուցանվող նյութը ավելի լավ է հիշվում, աշակերտի մոտ ձևավորում է անձանոթ իրադրություններում կողմնորոշվելու, իր գիտելիքները կիրառելու ունակություն: Իսկ ի՞նչ է պրոբլեմային ուսուցումը:

Պրոբլեմային ուսուցման հասկացությունը կապված է պրոբլեմի և պրոբլեմային իրավիճակի հասկացությունների հետ: Պրոբլեմային իրավիճակը ստեղծվում է, երբ առաջադրվող խնդրի կամ պրոբլեմի լուծման ճանապարհին առաջանում է անհամապատասխանություն առկա և անհրաժեշտ գիտելիքների միջև: Խնդիրը, որն առաջացնում է պրոբլեմային իրավիճակ, անվանվում է պրոբլեմային կամ պրոբլեմ: Սովորաբար պրոբլեմի համար հատկանշական է նաև աշակերտների հետաքրքրությունը դրա նկատմամբ և այն լուծելու պատրաստակամությունը, ինչպես նաև լուծման եղանակների, դրանց որոնման ճանապարհների բազմազանությունը (տես [124]): Հարկ է նշել, որ պրոբլեմը և խնդիրը սովորաբար զանազանում են իրարից, պրոբլեմը ընկալվում է որպես ավելի լայն խնդիր կամ խնդիրների համակարգ, իսկ խնդիրը՝ որպես պրոբլեմի լուծման քայլերից մեկը:

Ուսուցումը, որի ընթացքում ուսուցանող նյութի յուրացման ճանապարհին ստեղծվում են հաղթահարման ենթակա արգելքներ՝ խնդիրներ, պրոբլեմներ, պրոբլեմային իրավիճակներ, որոնց լուծման, հաղթահարման արդյունքում սովորողը յուրացնում է ուսուցանվող նյութը, անվանում են պրոբլեմային ուսուցում: Այդ արգելքները՝ խնդիրները, պրոբլեմ-

ները, պրոբլեմային իրավիճակները պետք է մատչելի լինեն սովորողների համար: Միաժամանակ, դրանք պետք է նաև սովորողների մոտ ցանկություն և լրացուցիչ հետաքրքրություն առաջացնեն ուսուցանվող նյութի նկատմամբ: Այս տեսակետից կարևոր է նաև պրոբլեմի և նրա լուծման առանձին փուլերում առաջադրվող խնդիրների մոտիվացիան:

Նշենք, որ պրոբլեմային ուսուցումը ունի նաև որոշ թերություններ: Այդ մեթոդով ուսուցման համար պահանջվում է երկար ժամանակ, պրոբլեմային իրավիճակներ ստեղծելու, համապատասխան խնդիրներ կազմելու համար ուսուցիչը պետք է դրսևորի մեծ վարպետություն, պրոբլեմի լուծման համար առաջադրվող քայլերի հերթականությունը սովորողին գրկում է լուծման ինքնուրույն ճանապարհ գտնելու հնարավորությունից և այլն: Հարկ է նշել նաև, որ պրոբլեմային ուսուցումը, ինչպես նաև ուսուցման ցանկացած մեթոդ նպատակահարմար է կիրառել ոչ թե ամբողջ դասի, այլ նրա առանձին հատվածների ուսուցումը կազմակերպելիս:

Պրոբլեմային ուսուցման ընթացքը հազեցված է գեղագիտական գրավչությամբ, որովհետև այստեղ ի հայտ են գալիս և լիարժեք դրսևորվում են գիտական գեղեցիկի մի շարք սուբյեկտիվ հատկանիշներ: Առաջին հերթին որոնելը, գտնելը, հայտնագործելը, որոնք հատուկ են պրոբլեմային ուսուցմանը, լինելով գիտական գեղեցիկի հատկանիշներ, լրացուցիչ գեղագիտական գրավչություն են հաղորդում մարդկային այդ ինտելեկտուալ գծունեությունը և ցանկալի են դարձնում այն:

Պրոբլեմային ուսուցման ընթացքում պրոբլեմի, խնդիրների լուծման իրականացման հաջորդական գործընթացը գիտական գեղեցիկի նպատակաուղղված, բարդ ու դժվարին խոչընդոտի հաղթահարման հատկանիշի դրսևորման լավագույն միջավայր է: Այստեղ հնարավորություն ունեն դրսևորվելու նաև գիտական գեղեցիկի՝ ոչ ակնհայտ ճշմարտության իմացության, առարկայի էությունը հասկանալու համար ներդրված ջանքերի, անսպասելիության և անկանխատեսելիության հատկանիշները:

Ուսուցման պրոբլեմային մեթոդը լայն հնարավորություններ է ընձեռում գեղագիտական արժեքների ձևավորման համար: Այդ ընթացքում դրսևորվում են մաթեմատիկական գեղեցիկի այնպիսի օբյեկտիվ հատկանիշներ, ինչպիսիք են կարգը, հստակությունը, պարզությունը, բազմազանությունների միասնականությունը և համընդհանրությունը: Այդ արժեքները, իրենց հերթին, մեծացնում են մաթեմատիկական նյութի նկատ-

մամբ հետաքրքրությունը, սովորողին մղում ստեղծագործական ակտիվության:

Պրոբլեմային ուսուցումը հաջողությամբ կարելի է կիրառել ինչպես խնդիրների լուծման, այնպես էլ հասկացությունների, թեորեմների, դրանց ապացուցումների ուսուցման գործընթացում: Ցուցադրենք ուսուցման այս մեթոդը և նրա գեղագիտական դրսևորումները «Երեք ուղղահայացների թեորեմը» թեմայի ուսուցման օրինակով:

Ինչպես նշվեց վերևում, պրոբլեմային ուսուցման հաջողության համար կարևոր է պրոբլեմի մոտիվացիան. ինչքան մեծ է պրոբլեմի առաջացման դրդապատճառը, այնքան մեծ է նրա նկատմամբ հետաքրքրությունը և, հետևաբար, մեծ է նաև ուսուցման արդյունավետությունը: Եթե մենք բավարարվենք երեք ուղղահայացների թեորեմը որպես ինքնին հետաքրքիր մաթեմատիկական օրինաչափության դիտարկումով և նրա մաթեմատիկական կիրառություններով, ապա դա բավարար չէ նրա ուսուցման մոտիվացիայի համար: Եվ, ինչպես հաճախ է լինում մաթեմատիկական նյութի ուսուցման ընթացքում, այստեղ նույնպես նպատակահարմար է ելնել նյութի առօրեական կիրառության հնարավորություն-ներից:

Իսկ առօրեական ի՞նչ խնդիրների լուծման մեջ կարելի է կիրառել երեք ուղղահայացների թեորեմը: Լավագույն օրինակը այստեղ, հավանաբար, սովորական տան կտուրի կառուցումն է: Այս օրինակը ուշագրավ է նաև նրանով, որ կապված լինելով շինարարության հետ, հնարավորություն է տալիս օգտագործել, մաթեմատիկայից ոչ առաջադիմող աշակերտների, մանավանդ՝ տղաների՝ այդ բնագավառում ունեցած գիտելիքները, նրանց ներգրավել ուսուցման գործընթացի մեջ և դասապրոցեսը դարձնել հետաքրքիր:

Եվ այսպես, ո՞րն է այստեղ կիրառական պրոբլեմը և ո՞րը՝ պրոբլեմային իրավիճակը: Պրոբլեմը կարծես հասկանալի է. անհրաժեշտ է կտուրի թեք հատվածում դնել հեծաններ, որոնք ունեն նաև կառույցը ամրացնող նշանակություն: Շինարարի խնդիրն է այնպես դնել այդ հեծանները կառուցվող կտուրի թեք հատվածում, որպեսզի դրանք ապահովեն շինության ամրությունը, օգտակարությունը և նաև՝ գեղեցկությունը: (Այստեղ կարելի է սովորողներին ներկայացնել Մարկոս Վիթրովիոսի հանրահայտ աֆորիզմը՝ «Ճարտարապետության մեջ ամեն ինչ պետք արվի՝ հաշվի առնելով ամրությունը, օգտակարությունը և գեղեցկությունը»): Դժվար չէ հականալ, որ այս խնդիրները լավագույնս կլուծվեն, եթե հեծանները լինեն ուղղահայաց թեք հատվածի հիմքերին:

Իսկ ինչպե՞ս կարելի է կանգնեցնել ուղահայացը թեք հարթության մեջ, որտեղ շարժվելը չափազանց դժվար է: Եվ բնականաբար, խնդրի լուծման ճանապարհներից մեկը կտուրի թեք հարթության մեջ ուղղահայացը տանելու խնդրի հանգեցումն է տանիքում համանման խնդրի լուծման, ինչը կարելի է իրագործել տարբեր եղանակներով՝ ելնելով սովորողների գիտելիքներից և այն բանից, որ տանիքի վրա տեղաշարժը իրականացվում է հեշտությամբ: Իսկ ինչպե՞ս կատարել նման հանգեցումը. ահա այստեղ առաջանում է պրոբլեմային իրավիճակը՝ անհամապատասխանությունը սովորողի արդեն իմացած և խնդրի լուծման համար անհրաժեշտ գիտելիքների միջև: Եվ նշված անհամապատասխանությունը առաջանում է ինչպես կիրառական, այնպես էլ մաթեմատիկական ոլորտում:

Այստեղ մենք մի կողմ ենք թողնում կիրառական խնդիրը և անցնում երկրաչափական պրոբլեմին. ինչպե՞ս կարելի է մի հարթության մեջ ուղղահայաց տանելու խնդիրը հանգեցնել նրան հատող հարթության մեջ նույն խնդրին: Այս, արդեն մաթեմատիկական պրոբլեմային իրավիճակը հանգուցացուծվում է հետևյալ պրոբլեմի լուծմամբ. արդյո՞ք թեքի հիմքով թեքի պրոյեկցիային տարած ուղղահայացը ուղղահայաց է նաև թեքին և հակառակը: Մենք այստեղ, ելնելով աշխատության ծավալի խնդրից, կանգ չենք առնի մաթեմատիկական այս խնդրի լուծման ուսուցմանն ու դրա գեղագիտական կողմին: Միայն նշենք, որ մաթեմատիկայի տեսական պրոբլեմը լուծելուց հետո անցնում ենք նաև կիրառական խնդրին: Սա կարևոր պահ է, որ հաճախ մոռանում են իրագործել մաթեմատիկայի ուսուցիչները: Նշենք նաև, որ կիրառությունը, կիրառական խնդիրը կարող է տալ պահանջվող ուսումնական և գեղագիտական էֆեկտը, ազդեցությունը, եթե այն քննարկվի մինչև վերջ, այսինքն՝ լուծվի: Այժմ երբ անցնում ենք կիրառական խնդրին, առաջանում են մի շարք պրոբլեմային խնդիրներ, որոնցից կարևորներն են՝ թեքի պրոյեկցիայի կառուցումը և տանիքի մեջ տրված կետից տրված ուղղին տարված ուղղահայացի կառուցումը: Այս խնդիրներից առաջինը լուծվում է ուղղալարի, իսկ երկրորդը կարող է լուծվել 3:4:5 հարաբերությամբ կողմեր ունեցող պյութագորասյան եռանկյան միջոցով: Արդեն այդ՝ ավելի պարզ խնդիրների լուծումները, դրանց գեղագիտությունը, իրագործման մեջ աշակերտական տարբեր խմբերի ներգրավումը, կազմում են մեթոդական դիտարկման առանձին հարցեր: Իսկ այդ և այլ հարցերի քննարկումը այստեղ չենք կատարի դարձյալ աշխատության ծավալը չմեծացնելու նպատակով:

Նշենք նաև, որ [9]-[11] դասագրքերում յուրաքանչյուր դասի տեսական նյութին հաջորդում է «Հասկացե՛լ եք դասը» վարժությունների համակարգը, ինչը կարող է ծառայել նաև որպես դասի պրոբլեմային ուսուցման կազմակերպման ուղեցույց:

3. Մաթեմատիկայի ուսուցման էվրիստիկական մեթոդը

Էվրիստիկայի հիմքում ընկած է հունարեն «Էվրիկա» եզրույթը, որ նշանակում է «գտնել» կամ «գտա»: Այդ բառով է արտահայտել իր հուզմունքն ու բավականությունը մեծ Արքիմեդը Հերոն թագավորի հանձնարարությամբ նրա թագի մեջ ոսկու և արծաթի քանակությունների մասին խնդիրը լուծելուց հետո: Փիլիսոփայական տեսակետից էվրիստիկան մտածո-դության, գործունեության, ստեղծագործության այնպիսի եղանակ է, որը նպաստում է կամ իրական է դարձնում նորի հայտնաբերումը: Գիտության մեջ այն հայտնագործության, ստեղծագործության մեթոդ է, հոգեբանության մեջ ուսումնասիրում է մարդու ստեղծագործական մտածողությունը, նրա առանձնահատկությունները: Մանկավարժության մեջ էվրիստիկան խնդիրների լուծման, ուսումնական նյութի շարադրման մեթոդ է, եղանակ: Բնականաբար, մեզ հետաքրքրում է այս վերջին մոտեցումը՝ ուսուցման էվրիստիկական մեթոդը:

Ուսուցման էվրիստիկական մեթոդի սկիզբը հավանաբար դրել է Սոկրատեսը, ով գտնում էր, որ «Ճշմարտությունը ծնվում է երկխոսության գործընթացում», որին և հետևում էր ինքը իր մանկավարժական գործունեության մեջ՝ հարցերի միջոցով ճշմարտության բացահայտման, հայտնագործման հնարավորություն ստեղծելով իր աշակերտների համար: Նոր ժամանակներում էվրիստիկական մոտեցումների առաջին արտահայտիչներից մեկը չէիս մեծ մանկավարժ Յան Ամուս Կոմենսկին էր, ով, դեմ գնալով միջանդարյան սխոլաստիկական մտածողությանը և կրթությանը, իր Մեծ Դիդակտիկայում գտնում է, որ ոչ թե պետք է երեխաներին սովորեցնել «մտածել ուրիշի խելքով» այլ բացահայտել և զարգացնել նրանց ընդունակությունները, որպեսզի դրանք «դառնան և հոսեն որպես կենդանի մտքի առվակներ» (տես [4]): «Էվրիստիկական մեթոդ» հասկացությունը մանկավարժության մեջ ներմուծել է անգլիացի մանկավարժ Արմստրոնգը, տասնիններորդ դարի երկրորդ կեսին: Նա գտնում էր, որ երեխայի մտածողության զարգացման համար անհրաժեշտ

է նրան տալ ոչ թէ պատրաստի գիտելիքներ, այլ սովորեցնել դրանց ստացման մեթոդները (տեւ [127, էջ 96]):

Էվրիստիկական մեթոդը նաև ժամանակակից մանկավարժների ակտիվ հետազոտության առարկա է: Այսպէս, ամերիկացի մաթեմատիկոս և մանկավարժ Դ. Պոյան Էվրիստիկական բնութագրում է որպէս սկզբունքների և կանոնների համախումբ, որոնք տանում են դեպի գյուտեր և հյատնագործություն (տեւ [155], [156]): Խնդրի լուծման համար նա առաջարկում է սովորողին պատասխանել կամ իրեն տալ հետևյալ հարցերը. ի՞նչն է անհայտ, ի՞նչ է տրված, ո՞րն է պայմանը, արդյո՞ք այս խնդիրը այլ ձևակերպումով կամ սրա նման խնդիր ինձ չի հանդիպել, և արդյո՞ք հնարավոր չէ օգտվել դրանից:

Շատ հետաքրքիր մոտեցումներ է ցուցաբերում նաև ամերիկացի մանկավարժ Ու. Սոյերը իր [189] գրքում: Նա գրում է. «Բոլոր մաթեմատիկոսներին հատուկ է “մտքի հանդգնությունը”. նրանք սիրում են հարցերի պատասխանը գտնել ինքնուրույն և չեն սիրում կողմնակի միջամտություններ: Այս հատկանիշով մաթեմատիկոսները նմանվում են երեխաներին: Երեխաներին նույնպէս հատուկ է մտքի այդ հանդգնությունը: Իսկապէս, փորձեք երեխային բացատրել որևէ խաղի կանոնները և առաջարկեք դրա վերաբերյալ որևէ խնդիր: Մեկ-երկու փորձից հետո երեխան կփորձի ինքնուրույն գտնել լուծումը և ձեզ թույլ չի տա միջամտել: Սա հնարավորություն է տալիս ուսուցչին աշակերտներին մղել դեպի Էվրիստիկական գործունեություն, դասարանի առջև դնել ինչ-որ մաթեմատիկական խնդիր, այնուհետև հուշող հարցերի միջոցով հնարավորություն տալ աշակերտներին ինքնուրույն գտնելու ինչպէս առանձին քայլերի, այնպէս էլ խնդրի վերջնական պատասխանը»:

Ըստ Ա. Մորոզովի՝ խնդիրների լուծման Էվրիստիկական մեթոդը այնպիսի սկզբունքների և կանոնների համախումբ է, որոնք տալիս են խնդրի լուծման հավանական ռազմավարությունը և նշում քայլերի իրականացման մարտավարությունը: Նա գտնում է, որ նախաձեռնողականությունը, հնարամտությունը, պատրաստակամությունը, համագործակցությունը, ինքնուրույնությունը և ստեղծագործական մոտեցումը բնավորության այնպիսի գծեր են, որոնք բոլոր ժամանակներում նպաստել են կյանքում մարդու հաջողություններին, նրա առջև ծագած խնդիրների լուծմանը, իսկ արագ փոփոխվող ժամանակակից աշխարհում դրանք ստանում են նոր հնչեղություն: Եվ հանրակրթական դպրոցի առաջնահերթ խնդիրներից է սովորողների մոտ նման որակների ձևավորումը և զարգացումը: Իսկ դրա

իրականացման լավագույն ճանապարհներից մեկը էվրիստիկական մեթոդի ներգրավումն է ուսումնական գործընթացի մեջ (տես [143]):

Էվրիստիկական ուսուցման ընթացքում ստեղծվում են մաթեմատիկայի գեղագիտական գրավչության արտահայտման և սովորողների գեղագիտական ունակությունների ձևավորման ու զարգացման լայն հնարավորություններ: Էվրիստիկական մեթոդում ավելի, քան ուսուցման որևէ այլ մեթոդի մեջ դրսևորվում է գիտական գեղեցիկի այնպիսի սուբյեկտիվ հատկանիշ, ինչպիսին է ինտելեկտուալ որոնումը, դրա արդյունքը՝ գտնելը և հայտնագործելը: Ուսուցման էվրիստիկական մեթոդում լայնորեն դրսևորվում են նաև գիտական գեղեցիկի անսպասելիության, անկանխատեսելիության, ոչ ակնհայտ ճշմարտության իմացության, նպատակաուղղված, բարդ ու դժվարին խոչընդոտի հաղթահարման սուբյեկտիվ հատկանիշներ: Էվրիստիկական մեթոդը կարելի է կազմակերպել այնպես, որ նրանում ուսուցումը ներկայանա որպես խաղ, ինչը նույնպես գիտական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշ է: Գիտական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշները լայնորեն դրսևորվում են էվրիստիկական ուսուցման սկզբունքների, գործառնությունների, խնդիրների, ուսուցման արդյունքների և մանկավարժահոգեբանական այլ տարրերի մեջ:

Մանկավարժական գրականության մեջ ընդունվում են էվրիստիկական ուսուցման հետևյալ սկզբունքները (տես [143], [216]).

- ուսուցչի և աշակերտի ստեղծագործական հնարավորությունների իրականացումը,
- սովորողների անձնական փորձի հաշվառումը,
- սովորողների նկատմամբ անհատական և շերտավորված մոտեցումը,
- սովորողների ակտիվության բարձրացումը,
- ուսուցչի և աշակերտների ստեղծագործական համագործակցությունը:

Ուսուցչի և աշակերտի ստեղծագործական հնարավորությունների իրականացումն արդեն մարդկային ամենաբարձր՝ ինքնաիրացման պահանջմունքի բավարարման լավագույն դրսևորումն է, ինչը բնականաբար ուղեկցվում է նաև զանազան հուզական դրսևորումներով, այսինքն՝ ունի հենքային գեղագիտական տարր: Նույնը կարելի է ասել նաև ուսուցչի և աշակերտների ստեղծագործական համագործակցության մասին: Ավելին, այս սկզբունքը բացահայտ ձևով պարունակում է գիտական գեղեցիկի ներդաշնակության օբյեկտիվ հատկանիշը, և չկա հոգևոր ներ-

դաշնակության ավելի բարձր դրսևորում, քան ուսուցչի և աշակերտի ստեղծագործական համագործակցությունը. այս համագործակցությունը աշակերտի վրա թողնում է անջնջելի ազդեցություն և մնում է ամբողջ կյանքում:

Սովորողների ակտիվության բարձրացումը նպաստում է գիտական գեղեցիկի այնպիսի սուբյեկտիվ հատկանիշների դրսևորմանը, ինչպիսիք են՝ ինտելեկտուալ որոնումը, առարկայի էությունը հասկանալու համար ներդրված ջանքների գործադրումը, նպատակաուղղված, բարդ ու դժվարին խոչընդոտի հաղթահարումը և այլն:

Գիտական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշները լայնորեն դրսևորվում են նաև էվրիստիկական ուսուցման գործառույթների մեջ: Մանկավարժական գրականության մեջ (տես [216]) էվրիստիկական ուսուցման հիմնական գործառույթներն են համարվում.

- գիտելիքների և գործողությունների եղանակների ինքնուրույն յուրացումը,
- ստեղծագործական մտածողության զարգացումը,
- ավանդական իրավիճակներում նոր խնդիրների հայտնաբերումը,
- ուսումնասիրվող առարկայի նոր հատկանիշները տեսնելը,
- մտքի որակի զարգացումը, ճանաչողական ունակությունների ձևավորումը,
- սովորողների ծանոթացումը ճանաչողական շփման ձևերի հետ, ուսուցման մոտիվացիայի զարգացումը:

Գիտելիքների և գործողությունների եղանակների ինքնուրույն յուրացումը ինտելեկտուալ որոնում է, այսինքն՝ գիտական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշ, ինչը սովորաբար ուղեկցվում է նաև գիտական գեղեցիկի անսպասելիության, անկանխատեսելիության, ստեղծագործության և այլ սուբյեկտիվ հատկանիշների դրսևորմամբ: Ստեղծագործական մտածողության զարգացումը նպաստում է ինտելեկտուալ որոնման, հայտնագործության և ստեղծագործության իրականացմանը: Ավանդական իրավիճակներում նոր խնդիրների հայտնաբերումը նույնպես ինտելեկտուալ որոնման, հայտնագործության գործընթաց է, ինչը կարող է ուղեկցվել նաև անկանխատեսելիության և անսպասելիության տարրերով: Ասվածը վերաբերում է նաև ուսումնասիրվող առարկայի նոր հատկանիշները տեսնելուն: Մտքի որակի զարգացումը և ճանաչողական ունակությունների ձևավորումը նպաստում են առարկայի էությունը հասկանալուն, նպատակաուղղված, բարդ ու դժվարին խոչընդոտների հաղթահարման

կարողունակությանը, ինտելեկտուալ որոնման մակարդակի բարձրացմանը: Ասվածը ցույց է տալիս, որ էվրիստիկական ուսուցման գործառնությունների մեջ լայնորեն են դրսևորվում գիտական գեղեցիկի համարյա բոլոր սուբյեկտիվ հատկանիշները:

Ավելացնենք, որ էվրիստիկական գործունեության ընթացքում կոլեկտիվում ստեղծվում է դրական միջավայր, մեծանում է սովորողի ստեղծագործական ակտիվությունը, սովորողին տրվում է գործունեության ազատություն, ուսուցումն ուղեկցվում է հուզական դրսևորումներով: Այս գործոնները մի կողմից նպաստում են գիտական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշների դրսևորմանը, մյուս կողմից ստեղծում են գեղագիտական հարաբերությունների, գեղագիտական միջավայրի և գեղագիտական այլ որակների ձևավորման լավագույն նախադրյալներ:

Ասվածը լիովին բավարար է ցույց տալու համար մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում էվրիստիկական մեթոդի գեղագիտական գրավչությունը և գեղագիտականը ի հայտ բերելու մեծ ներուժը:

4. Մաթեմատիկական մոդելավորումը

Մաթեմատիկայի զարգացման, մաթեմատիկական ուսումնասիրությունների կատարման, ինչպես նաև մաթեմատիկական կրթության կազմակերպման հիմնական խթաններից մեկը պատմականորեն եղել է աշխարհակառույցի, նրա առարկաների և երևույթների ուսումնասիրության մեջ մաթեմատիկայի հիմնարար դերը: Այդ դերի իրականացման, իրականության ճանաչողության մեջ մաթեմատիկայի ներգրավման կարևոր ճանապարհներից մեկը մաթեմատիկական մոդելավորման մեթոդն է: Ըստ էության այս մեթոդը նպատակաուղղված է մաթեմատիկական լեզվի միջոցով բնության երևույթների գրառմանը, նրա առարկաների պատկերմանը և մաթեմատիկական ապարատի միջոցով դրանց հետագա ուսումնասիրության իրականացմանը: Այդ ճանապարհով Նյուտոնը կարողացավ մաթեմատիկական պարզագույն բանաձևներով արտահայտել մեխանիկայի օրենքները: Սա նաև մաթեմատիկայի գործնական կիրառության ճանապարհն է, կյանքում առաջացած գործնական խնդիրների ուսումնասիրության և լուծման մեջ մաթեմատիկայի կիրառության ճանապարհը:

Մաթեմատիկական մոդելավորման միջոցով հնարավոր է դառնում բացահայտել, գտնել ու վեր հանել բնության առարկաների, երևույթների

ամենաէական հատկանիշները, հատկանիշներ, որոնք անառարկելի են և բնութագրում են, տանում դեպի առարկայի, երևոյթի ճշմարտական էութունը: Եթէ հիշենք արվեստի նպատակի՝ որպէս առարկայի երևոյթի բնութագրական հատկանիշների բացահայտում և ներկայացում, Հիպո-լիտ Տենի բնութագրումը, ապա մաթեմատիկական մոդելավորումը կար-ծեք ծառայում է նույն նպատակներին: Դրանք տարբերվում են միայն իրենց նշանակությամբ: Եթէ արվեստը, նրա ստեղծագործությունը ուղղված են մարդու հուզական աշխարհին, ապա գիտությունն ու տեխ-նիկան և մոդելավորման միջոցով դրանց ուսումնասիրությունն իրակա-նացնող մաթեմատիկան ուղղված են մարդու մտքին, եթէ արվեստը բա-ցահայտում է գեղեցիկը, ապա գիտությունը, տեխնիկան և մաթեմատի-կան բացահայտում են ճշմարտությունը:

Ավելացնենք, որ մաթեմատիկական մոդելավորման միջոցով մաթեմա-տիկան ներթափանցել է բնության և հասարակության ուսումնասիրու-թյանն ուղղված նորանոր գիտությունների մեջ՝ տնտեսագիտություն, սո-ցիոլոգի, լեզվաբանություն և այլն: Նշենք, օրինակ, որ այսօր անհնար է պատկերացնել տնտեսագիտությունը առանց մաթեմատիկական մոդե-լավորման:

Մոդելավորման մեթոդը լայն կիրառություն ունի նաև մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում: Այն ծառայում է մաթեմատիկայի հետ մի-ջառարկայական կապերի, մաթեմատիկայի կիրառական ուղղվածության և այլ մանկավարժամեթոդական խնդիրների լուծմանը:

Մաթեմատիկական մոդելավորման մեթոդը գիտական ուսումնասի-րություններում և մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում իրակա-նացվում է չորս փուլերով, և մաթեմատիկայի, նրա կիրառության գեղա-գիտական գրավչությունը դրսևորվում է այս փուլերից յուրաքանչյուրում:

Առաջին փուլ: Ուսումնասիրվող առարկայի, երևոյթի, կիրառական խնդրի ուսումնասիրություն և նրա մաթեմատիկական մոդելի կառուցում: Այս փուլում և, ընդհանրապէս, մաթեմատիկական մոդելավորման ըն-թացքում դրսևորվում են գիտական գեղեցիկի համարյա բոլոր օբյեկտիվ հայտանիշները. այստեղ կա և՛ կարգ, և՛ տրամաբանական խստություն, և՛ հստակություն, և՛ պարզություն, և՛ համընդհանրություն, և՛ անսպասե-լիություն, և՛ մոդելի հետ համապատասխանություն: Մեխանիկայի օրենքներն արտահայտող մաթեմատիկական մոդելների՝ բանաձևերի պարզությունն, օրինակ, զարմացրել, ապշեցրել է Նյուտոնին, և այս հան-

գամանքը, ինչպես մենք արդեն նշել ենք, նա համարել է Աստծո գոյության ապացուցում:

Երկրորդ փուլ: Մաթեմատիկական մոդելի ուսումնասիրություն, ինչն հանգում է մոդելի՝ որպես մաթեմատիկական բանաձևի կամ խնդրի լուծման: Այս փուլում մաթեմատիկայի գեղագիտական գրավչության դրսևորման մասին կխոսվի մաթեմատիկական խնդիրներին նվիրված բաժնում:

Երրորդ փուլ: Ստացված մաթեմատիկական խնդրի լուծման արդյունքների օգնությամբ դիտարկվող կիրառական խնդրի լուծում:

Չորրորդ փուլ: Կիրառական խնդրի ուսումնասիրություն նրա մոդելի միջոցով. մաթեմատիկական լուծման արդյունքների, ստացված բանաձևերի, պատասխանի դիտարկման միջոցով կիրառական խնդրի հետագա ընդհանրացումների կամ սահմանափակումների և այլ հարցերի պարզաբանում:

Հարկ է նկատել, որ մաթեմատիկայի ուսուցիչների մեծ մասը երկրորդ փուլով ավարտված է համարում կիրառական խնդրի լուծման գործընթացը: Մինչդեռ, այս վերջին երկու փուլերը հնարավորություն են տալիս քննարկել և խորացնել կիրառական ոլորտի հետ մաթեմատիկայի կապը, ցույց տալ, որ սովորողը լուծում է ոչ թե մաթեմատիկական, այլ կիրառական ոլորտի խնդիր: Լուծենք, օրինակ, հետևյալ խնդիրը:

Նավակը, դուրս գալով կառամատույցից, շարժվեց գետի հոսանքի ուղղությամբ: Ինչքա՞ն ճանապարհ պետք է անցնել այն, որպեսզի դուրս գալուց որոշ (t) ժամանակ անց հասնել վերադառնալ կառամատույց:

Եթե նավակի սեփական արագությունը նշանակենք u -ով, գետի հոսանքի արագությունը v -ով, գնալու և գալու համար ծախսած ժամանակը՝ t -ով, իսկ անցած ճանապարհը՝ s -ով, ապա գետի հոսանքի ուղղությամբ նավակը կշարժվի $u + v$ արագությամբ և կծախսի $s/(u + v)$ ժամանակ, իսկ հակառակ ուղղությամբ կշարժվի $u - v$ արագությամբ և կծախսի $s/(u - v)$ ժամանակ: Հետևապես, կունենանք՝ $s/(u + v) + s/(u - v) = t$: Սա խնդրի լուծման առաջին փուլն էր:

Երկրորդ փուլում պետք է լուծել ստացված $s/(u + v) + s/(u - v) = t$ հավասարումը s անհայտի նկատմամբ. $s = t(u + v)(u - v)/2u$, ինչին կարելի է տալ ավելի գրավիչ տեսք, կատարելով բանաձևերի որոշ ձևափոխություն՝ $s = t(u^2 - v^2)/2u$: Պատասխան՝ $s = t(u^2 - v^2)/2u$:

Ահա այստեղ աշակերտը կանգ է առնում՝ համարելով խնդիրը լուծված, և նման լուծումը ուսուցիչը գնահատում է ամենաբարձր նիշով: Իսկ

մենք ունենք դեռ խնդրի լուծման նս երկու փուլ: Ի՞նչ անել այդ փուլերում, որ չի արել աշակերտը:

Երրորդ փուլ: Առաջին դիտարկման հնարավորությունը մեզ տալիս է խնդրի պատասխանը՝ $s = t(u^2 - v^2)/2u$: Այստեղ եթե $u < v$, ապա կստանանք $s < 0$, քանի որ $t > 0$, $u > 0$: Հետևաբար՝ այս դեպքում խնդիրը լուծում չունի, ինչը պետք է նշեր աշակերտը: Միաժամանակ, մաթեմատիկական այս դիտարկումը ցույց է տալիս, որ պետք է ուշադրություն դարձնել ֆիզիկական խնդրի պայմանների վրա. նավակի արագությունը չպետք է փոքր լինի գետի հոսանքի արագությունից, քանի որ հակառակ դեպքում նավակը չի կարող վերադառնալ կառամատույց: Իսկ ի՞նչ կարելի է եզրակացնել, եթե $u = v$: Այդ դեպքում էլ պատասխանը մեզ կհանգեցնե՞ր $s = 0$ արդյունքի: Այսինքն, խնդրի լուծում է միայն նավակի նախնական դրությունը, երբ այն դեռ դուրս չի եկել կառամատույցից: Այդ դեպքում անպայման պետք է լինի նաև $t = 0$: Այդ դեպքի քննարկումն էլ շատ պարզ է. որովհետև եթե նավակի արագությունը հավասար է գետի արագությանը, ապա այն հետ դառնալիս, այսինքն՝ գետի հոսանքին հակառակ ուղղությամբ շարժվելով, առաջ չի գնա, այլ կմնա նույն տեղում: Այսինքն՝ աշակերտը պետք է նշեր, որ խնդիրը այս դեպքում ունի $s = 0$ լուծումը:

Չորրորդ փուլ: Այժմ նորից անդրադառնանք խնդրի մոդելին՝ $s/(u + v) + s/(u - v) = t$ հավասարմանը: Նրանում մասնակցում են չորս՝ s , t , u , v փոփոխականներ, որոնց մեջ անհայտը կարող է լինել ոչ միայն s -ը: Հետևաբար, մենք կարող ենք կազմել չորս տիպի խնդիրներ, որոնցից յուրաքանչյուրում այդ հավասարման մեջ մտնող երեք փոփոխականները տրվում են որպես հաստատուններ (դրանք կարող են ունենալ նաև թվային արտահայտություն), իսկ չորրորդը դիտվում է որպես փոփոխական:

Ուսուցիչը, առանց շտապողականության, այս դիտարկումից հետո հանձնարարում է աշակերտներին կազմելու այդ տիպերից յուրաքանչյուրի վերաբերյալ համապատասխան խնդիր և իրականացնում դրանց լուծումները: Ստեղծագործական այս գործընթացը, որում առկա են նաև գիտական գեղեցիկի օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ շատ հատկանիշներ, դասին հաղորդում է գեղագիտական մեծ գրավչություն, մեծացնում է նաև աշակերտների հետաքրքրությունը ոչ միայն դասի, այլև մաթեմատիկայի և նրա կիրառական ոլորտի նկատմամբ՝ ընդհանրապես: Իսկ մեր ուսուցիչները, անշուշտ, հաճախ ելնելով օբյեկտիվ հանգամանքներից, անտեսում

են կիրառական խնդրի լուծման կամ մաթեմատիկական մոդելավորման մեթոդի այս հնարավորությունները:

Անշուշտ, մեծ է մաթեմատիկական մոդելավորման մեթոդի դերը կիրառական խնդրների լուծման գործընթացում: Մակայն դրանով այն չի սահմանափակվում: Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի արդյունավետության բարձրացման, ուսուցման դիտակտիկական սկզբունքների, մասնավորապես՝ գիտակցականության սկզբունքի լիարժեք դրսևորման համար անհրաժեշտ է մոդելավորման մեթոդը կիրառել նաև ուսուցման գործընթացի այնպիսի կարևոր բաղադրամասերի նկատմամբ, ինչպիսիք են մաթեմատիկական հասկացությունների և թեորեմների ուսուցումն է:

Հասկացությունների պարագայում խոսքը գնում է կիրառական ոլորտի այն առարկաների և երևույթների ուսուցման անհրաժեշտության մասին, որոնց մաթեմատիկական մոդելներն են հանդիսասանում այդ հասկացությունները: Սա առաջին հերթին վերաբերում է հանրահաշվի և մաթանալիզի հասկացություններին: Երկրաչափական նյութի ուսուցումը նման մեկնաբանությունների կարիք չունի: Քեոփսի բուրգի մաթեմատիկական մոդելը բուրգն է, և սա աշակերտին հասկացնելու համար ուսուցչից հատուկ ջանքեր չեն պահանջվում: Իսկ ահա ի՞նչ գործառույթներ են իրականացնում հանրահաշվական գործողությունները, ֆունկցիան, լոգարիթմը կամ ածանցյալը մաթեմատիկայի կիրառական ոլորտում, ինչպիսի լեզվական արտահայտություններ ունեն դրանք և նմանատիպ այլ հարցեր հիմնարար բացատրության կարիք ունեն: Նկատենք, որ հաճախ աշակերտը կիրառական խնդիրը չի կարողանում լուծել նրանում առկա կիրառական ոլորտի հասկացությունների մաթեմատիկական մոդելները չիմանալու պատճառով: Օրինակ, խնդրում ասվում է, որ ջրհորը խորացրել են, իսկ աշակերտը չգիտի, չի անցել «խորացնել» բառի մաթեմատիկական մոդելը ու չի կարողանում կողմնորոշվել, թե գումարման կամ հանման գործողություններից ո՞րը պետք է կիրառի պահանջվող արդյունքը ստանալու համար: (Այս հարցերը մանրամասն քննարկված են [7] աշխատանքում:)

Նույնը վերաբերում է նաև թեորեմների ուսուցման մեթոդիկային: Այստեղ էլ թեորեմի նկատմամբ հետաքրքրությունը մեծացնելու, նրա ուսուցումը ավելի մատչելի դարձնելու համար, ուսուցիչը պետք է նախապես նկարագրի և լուծի կիրառական այնպիսի խնդիր, որի մաթեմատիկական մոդելը հանգում է տվյալ թեորեմին: Նշենք, որ հանրա-հաշվի [9]-[11]

դասագրքերը կազմվել են՝ ելնելով այս նկատառումներից: Ավելին, այդտեղ հատուկ ուսումնասիրության առարկա են դարձել հանրահաշվի կիրառական ոլորտի այնպիսի կարևոր հասկացություններ, որոնք աշակերտը դեռևս հնարավորություն չի ունեցել ուսումնասիրել այլ ուսումնական առարկաների միջոցով: Այդպիսիք են, օրինակ, արագությունը, գինը, տոկոսադրույքը, կշռույթը և այլն:

5. Ուսուցման այլ մեթոդներ

Բացի նշվածներից, գոյություն ունեն նաև մաթեմատիկայի ուսուցման այլ մեթոդներ: Դրանցից է առաջին հերթին ծրագրավորված ուսուցումը, երբ ուսուցանվող նյութը հաղորդվում է փոքրիկ բաժինների հաջորդականության միջոցով: Թեև այս մեթոդը կարող է և արդյունավետ լինել նյութի յուրացման տեսանկյունից, սակայն նրա կիրառման ժամանակ սահմանափակվում են սովորողի ստեղծագործելու և գիտական գեղեցիկի սուրբ-յեկտիվ հատկանիշների դրսևորման հնարավորությունները, և մեթոդը աչքի չի ընկնում գեղագիտական գրավչությամբ:

Գեղագիտական մեծ գրավչություն ունի խաղը, որ կարելի է դիտարկել նաև որպես մաթեմատիկայի ուսուցման մեթոդ և որին մենք անդրադարձանք (տես էջ 110-112):

§3. ԻՆԴՈՒԿՏԻԱՅԻ ԵՎ ԴԵԴՈՒԿՏԻԱՅԻ ԳԵՂԱԳԻՏԱԿԱՆ ԳՐԱՎՉՈՒԹՅՈՒՆԸ

Իրերի պատճառների իմացությունից բխում
է ճշմարիտ երջանկության գիտությունը:

Գոթֆրիդ Լայբնից

1. Ինդուկցիան և նրա գեղագիտական գրավչությունը

Ճանաչողության գործընթացում իմացության մեթոդները ավելի հաճախ հանդես են գալիս միասնաբար, ինչը ճանաչողությունը դարձնում է ավելի համակողմանի ու խորը: Էմպիրիկ, էվրիստիկական և տրամաբանական մեթոդների զուգակցման միջոցով ճանաչողության իրականացման կարևոր մեթոդ է ինդուկցիան (լատիներեն՝ *inductio* - մակաձուլ, մակաձուլություն), իմացության այն մեթոդը, որը ճանաչողությունը իրականացնում է փորձից ստացված գիտելիքների ընդհանրացման, մասնավորից դեպի ընդհանուրը գնալու, առանձին փաստերից ընդհանրական եզրակացության հանգելու եղանակով: Հարկ է նշել, որ ինդուկցիան կիրառվում է միայն մաթեմատիկական օրինաչափությունների բացահայտման համար, իսկ դրանց ապացուցումը կատարվում է դեդուկտիվ մեթոդներով (տես կետ 3-ը):

Նկարագրենք իմացության ինդուկտիվ մեթոդը ավելի հանգամանորեն: Դիցուք ունենք A բազմությունը և P հատկությունը, որով կարող են օժտված լինել կամ չլինել A -ի տարրերը: Ինդուկցիայի մեթոդը կիրառվում է ապացուցելու համար այն, որ A -ի բոլոր տարրերը օժտված են P հատկությամբ: Դրա համար առաջարկվում է այսպիսի մտահանգում.

Եթե A -ի $a_1, a_2, \dots, a_k$ տարրերը օժտված են P հատկությամբ, ապա P հատկությամբ օժտված են A -ի բոլոր տարրերը:

Նման մոտեցում հաճախ է կիրառվում մեր առօրյայում: Գնալով որևէ երկիր և սիրալիք վերաբերմունքի արժանանալով նրա բնակիչների կողմից, մենք եզրակացնում ենք, որ այդ երկրի բնակիչները սիրալիք են օտարների հանդեպ: Բայց մենք հանդիպել ենք այդ երկրի բնակիչների միայն մի փոքր մասի հետ: Հետևաբար, մեր եզրակացությունը ամբողջական և ճշմարիտ կամ ապացուցված համարվել չի կարող:

Եթե վերևում կատարված դատողության մեջ A-ն վերջավոր է և ունի հենց k տարր, ապա առաջարկված ինդուկտիվ մտահանգումը բերում է ճշմարիտ եզրակացության: Այդ դեպքում այն կոչվում է լրիվ ինդուկցիա: Հակառակ դեպքում, այսինքն՝ եթե A-ի տարրերի թիվը k-ից մեծ է կամ եթե A-ն անվերջ բազմություն է, այդ մտահանգումը կոչվում է թերի ինդուկցիա: Պարզ է, որ թերի ինդուկցիան հավաստի տեղեկություն չի տալիս, և նրա եզրակացությունը կարող է կեղծ լինել: Օրինակ, կարելի է նշել բազմաթիվ բնական թվեր, որոնք փոքր են հարյուրից: Այդտեղից, թերի ինդուկցիան հնարավորություն է տալիս պնդելու, որ յուրաքանչյուր բնական թիվ փոքր է հարյուրից, ինչը, իհարկե, սխալ է:

Ինդուկցիայի նշված տեսակները ավելի հաճախ կիրառվում են դպրոցական ցածր դասարաններում, որտեղ սովորողների մտածողությունը ավելի առարկայական է: Ընդ որում, թերի ինդուկցիան հիմնականում կիրառվում է արդյունավետ եզրահանգումներ կատարելիս, այսինքն՝ այն դեպքում, երբ հայտնի է, որ ստուգվող ընդհանուր եզրակացությունը ճշմարիտ է, իսկ առանձին տարրերի համար նախադրյալների ճշմարտությունը բերվում են որպես ընդհանուր եզրակացության մասնավոր օրինակներ: Միայն եզրահանգումներով թերի ինդուկցիան համարյա չի կիրառվում դպրոցական մաթեմատիկայի ողջ դասընթացում:

Հարկ է նկատել, որ մարդկային մտածողությունը հակված է դեպի թերի ինդուկցիա. նրան հատուկ է մասնավոր մի քանի դեպքերից ընդհանրական դատողությունների, եզրակացությունների հանգելը: Օրինակ, եթե ինչ-որ բնակավայրում մարդուն մի քանի անգամ խաբել են, ապա նա եզրակացնում է, որ այդ բնակավայրում բոլոր մարդիկ խաբեբաներ են, կամ եթե մարդկանց մի խումբ լքում է հայրենիքը, ապա մարդիկ եզրակացնում են, որ բոլորը լքում են հայրենիքը և այլն: Եվ մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում ինդուկցիայի մեթոդը կիրառելիս պետք է աշխատել սովորողի ուշադրությունը հրավիրել այս երևույթի վրա. լրիվ և թերի ինդուկցիաների կիրառումը նման հնարավորություն ընձեռում է. հստակ խոսքի, ճշմարիտ դատողության կառուցման ճանապարհը նաև սովորողին սխալներից գերծ պահելն է:

Ասվածը ցույց է տալիս, որ մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում լրիվ և թերի ինդուկցիաների կիրառումը ունի արժեքների ձևավորման մեծ ներուժ: Դրա գեղագիտական բաղադրիչը լրիվ ինդուկցիայի տրամաբանական խստությունն է, հիմնավորվածությունը, հստակությունը, պարզությունը, ընդհանրությունը: Իսկ թերի ինդուկցիան առօրեական և մա-

թեմատիկական պարզ օրինակների միջոցով սխալ մտածողության ցուցադրման և կանխարգելման հնարավորություն է տալիս, ինչում նույնպես առկա է գեղագիտական տարրը:

Սխալ եզրակացությամբ թերի ինդուկցիայի կիրառման օրինակները թույլ են տալիս նաև սովորողին համոզվելու, որ թերի ինդուկցիան միայն վարկածների, ճշմարտանման եզակացությունների ստացման միջոց է: Իսկ թերի ինդուկցիայի կիրառումով սխալ եզրակացության են հանգել անգամ մեծ մաթեմատիկոսները: Օրնակ, Պ. Ֆերման ենթադրում էր, որ $2^{2^n} + 1$ տեսքի թվերը պարզ թվեր են n -ի կամայական բնական արժեքի դեպքում: Դրա համար հիմք է ծառայել այն, որ իսկապես, այդ տեսքի թվերը պարզ են n -ի 1, 2, 3 և 4 արժեքների համար: Այն ժամանակներում հաշվիչ մեքենաներ չկային, և մարդիկ, նաև մաթեմատիկոսները հաշվելու վրա բավական շատ ժամանակ էին ծախսում, և Լ. Էյլերը, ով ավելի արագ էր հաշվում, քան Ֆերման, ցույց տվեց, որ Ֆերմայի եզրակացությունը սխալ է. $n = 5$ արժեքի համար ստացվող $2^{32} + 1$ թիվը բաղադրյալ է, այն ունի մեկից տարբեր բաժանարար, օրինակ՝ 641-ը:

Դիտարկենք մեկ այլ օրինակ: Կարելի է ստուգել, որ $n^2 + n + 17$ արտահայտության արժեքը n -ի 1, 2, 3, ..., 15 արժեքների համար, պարզ թիվ է: Կարելի է այստեղից եզրակացնել, որ այդ արտահայտության արժեքը n -ի կամայական արժեքի դեպքում դարձյալ պարզ թիվ է: Պարզվում է, որ ոչ. $n = 16$ արժեքի համար մենք ստանում ենք $16^2 + 16 + 17$ թիվը, որը արդեն բաղադրյալ է: Իսկ եթե դասարանում գտնվի մեկը՝ շնորհալին, որը կնկատի, որ հաշվումները ամենևին էլ անհրաժեշտ չեն, քանի որ նշված թիվը բաղադրյալ է $n = 17$ արժեքի համար՝ $17^2 + 17 + 17 = 17(17 + 2)$, ապա առաջադրված օրինակում գեղեցիկը կդրսևորվի բոլորովին այլ կողմերով, քանի որ նրանում հանդես կգան պարզության և անսպասելիության գեղագիտական հատկանիշները: Իսկ այդ շնորհալին կստանա լրացուցիչ գեղագիտական բավարարություն, ինչն արդյունք է գտնելու, հայտնագործելու գեղագիտական հատկանիշների:

Ասվածը չի կարող թերագնահատել թերի ինդուկցիայի դերը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում: Այն ճշմարտությունների բացահայտման հզոր միջոց է, սակայն նորից կրկնենք, որ նրա եզրակացությունները միայն վարկածներ են, որոնք կարիք ունեն հաստատման կամ հերքման:

Եվ վարկածային տեսքի մեջ անգամ թերի ինդուկցիան ունի գրավչության իր տարրերը, որոնք արդյունք են գիտական գեղեցիկի ինչպես օբյեկտիվ, այնպես էլ սուբյեկտիվ հատկանիշների դրսևորման: Իսկապես,

ինդուկցիայի վարկածը ստացվում է գիտական գեղեցիկի՝ որոնման, գտնելու, հայտնագործելու սուբյեկտիվ հատկանիշների դրսևորման արդյունքում: Իսկ որպես վարկածը գտնելու, առաջադրելու խթանիչ գործոններ հանդես են գալիս ուսումնասիրվող օբյեկտներում բազմազանությունների միասնության և ընդհանրության, կարգի, պարզության, համաչափության, ռիթմի առանձին կողմեր, որոնք նախանշում են նաև գեղեցիկի համապատասխան օբյեկտիվ հատկանիշների դրսևորումներ, իրենց հետ բերում գեղեցիկի որոշակի նախագագում: Վարկածի հաստատումը արդեն նշանակում է նաև գեղեցիկի առկայություն: Գեղեցիկի հայտնաբերման և հաստատման այդ գրավիչ տարրն է, որ մարդկային միտքը մղում է դեպի վարկածի առաջադրումն ու հաստատումը, ապահովում դրա համար պահանջվող մարդկային ջանքերի գործադրումը: Հետևաբար, այստեղ դրսևորվում են նաև գիտական գեղեցիկի՝ ոչ ակնհայտ ճշմարտության իմացության և դրա համար գործադրված ջանքերի սուբյեկտիվ հատկանիշները:

2. Դեդուկցիան և նրա գեղագիտական գրավչությունը

Դեդուկցիան (լատիներեն deductio նշանակում է արտածում) գիտական իմացության մեթոդ է, գործընթաց, մտածողության ձև, մտահանգման եղանակ, որի միջոցով տրված դատողություններից բխեցվում, ստացվում է այլ դատողություն: Ընդ որում, բխեցումը կարող է կատարվել ինչպես անմիջականորեն, այնպես էլ դատողությունների այնպիսի շղթայի տեսքով, որի յուրաքանչյուր անդամ ստացվում է իր նախորդներից՝ տրամաբանության կանոնների հիման վրա: Տրված դատողությունները կոչվում են դեդուկցիայի նախադրյալներ, իսկ բխեցված դատողությունը՝ նրա եզրակացություն: Ահա դեդուկտիվ մտահանգման դասական օրինակը.

«Բոլոր մարդիկ մահկանացու են: Սոկրատեսը մարդ է: Հետևաբար, Սոկրատեսը մահկանացու է:»

Այս օրինակը հիմք է ծառայել դեդուկտիվ մտահանգումը ներկայացնել որպես առարկաների կամայական դասի մասին ընդհանուր գիտելիքներից նրա ենթադասի կամ եզակի տարրի մասին մասնավոր գիտելիքների բխեցման եղանակ: Սակայն դեդուկտիվ մտահանգման մյուս կարևոր օրինակները՝ աքսիոմատիկ տեսության արտածումը և մաթեմատիկա-

կան ինդուկցիան (տես հաջորդ կետը), որը նույնպես դեդուկտիվ մտահանգում է, հերքում են այս մոտեցումը:

Դեդուկցիան կամ տրամաբանական արտածումը դիտարկել և նրա անհրաժեշտությունը գիտակցել են դեռևս անտիկ շրջանի հույն մտածողները: Պյութագորասը առաջիններից մեկն էր, ով խոսեց գիտելիքի ապացուցման մասին և տվեց ապացուցման իր հանրահայտ օրինակը՝ Պյութագորասի թեորեմի ապացուցումը: Ժամանակի հույն մտածողների ուսումնասիրությունները հնարավորություն տվեցին Արիստոտելին մշակելու դեդուկցիայի մասին տեսությունը: Իսկ Էվկլիդեսը իր «Մկգրունքներում» դեդուկտիվ մեթոդի կիրառումը հասցրեց կատարելության բարձրագույն աստիճանի. երկրաչափության կառույցի մեջ դեդուկտիվ մեթոդի կիրառման Էվկլիդեսյան մոտեցումը եղել է դեդուկտիվ մտածողության իդեալ բոլոր ժամանակների համար:

Դեդուկցիայի արիստոտելյան տեսությունը զարգացման նոր փուլ է մտել միայն նոր ժամանակներում՝ Դեկարտի, Լայբնիցի, Կանտի և այլ մտածողների աշխատանքներում, իսկ 19-րդ դարի իդեալացի մաթեմատիկոս և փիլիսոփա Ջորջ Բուլը սահմանեց հանրահաշվական գործողություններ մտքի, տրամաբանական դատողությունների նկատմամբ է ստեղծեց տրամաբանության կամ բուլյան հանրահաշիվը: 20-րդ դարի սկզբներին դեդուկտիվ մեթոդը իր վերջնական ձևավորումը ստացավ մաթեմատիկական տրամաբանության շրջանակներում՝ դառնալով նրա բաժիններից մեկը:

Դեդուկտիվ մտահանգման միջոցով ստացված գիտելիքը համարվում է հավաստի, և եթե մաթեմատիկական գիտելիքը մեծ հավատ է ներշնչում, համարվում է ճշմարտության չափանիշ, ապա հիմնական պատճառն այն է, որ այն հաստատվում է դեդուկտիվ մտահանգման միջոցներով: Հետևաբար, երբ մենք խոսում ենք գիտական գեղեցիկի այնպիսի օբյեկտիվ հատկանիշի մասին, ինչպիսին տրամաբանական խստությունն է, ապա առաջին հերթին նկատի ունենք մտահանգման դեդուկտիվ մեթոդի կիրառությունը: Այս հանգամաքը նույնպես ընդգծում է դեդուկտիվ մեթոդի գեղագիտական գրավչությունը:

Գիտական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշներից դեդուկտիվ մտահանգմանը կարելի է վերագրել նաև ներդաշնակությունը, որ ստեղծվում է մտահանգման տարրերի կամ արտածման անդամների միջև՝ տրամաբանական օրենքների և կանոնների միջոցով: Գիտական գեղեցիկի մյուս

օրյեկտիվ, ինչպես նաև սուբյեկտիվ հատկանիշները դեդուկտիվ մեթոդում դրսևորվում են յուրովի՝ ոչ անմիջականորեն:

Գիտական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշներից թերևս միայն մաթեմատիկական օրյեկտիվ՝ թեորեմի կամ ապացուցման էությունը հասկանալու համար գործադրված ջանքներն են, որ հատուկ են և ուղղակիորեն դրսևորվում են դեդուկտիվ մտահանգման ժամանակ: Իսկ գտնելը, որոնելը, հայտնագործելը, անսպասելիությունը և գիտական գեղեցիկի մնացած սուբյեկտիվ հատկանիշները այնքան էլ հարազատ չեն դեդուկտիվ մեթոդին, և ունեն կոնկրետ դրսևորվումներ՝ կապված յուրաքանչյուր թեորեմի կամ նրա ապացուցման հետ և կքննարկվեն մտածողության այդ ձևերին նվիրված բաժնում:

Գիտական գեղեցիկի հաջորդ հատկանիշը, որ դրսևորվում է դեդուկտիվ մեթոդի կիրառման ընթացքում, նրա տրամաբանական խստությունն է: Ընդ որում, եթե անդրադառնալու լինենք հանրակրթությանը, ապա երկրաչափության դասընթացի աքսիոմատիկ շարադրանքին և նրանում դեդուկտիվ մեթոդի կիրառմանը անընդհատ հետևող աշակերտի համար հանրահաշվական նյութի շարադրանքը ստանում է անհրապուրիչ տեսք, եթե նրանում չի կիրառվում աքսիոմատիկ մեթոդը, ինչին մենք անդրադարձել ենք աքսիոմատիկ մեթոդին նվիրված բաժնում:

3. Մաթեմատիկական ինդուկցիան և նրա գեղագիտական գրավչությունը

Հասկանալի է, որ լրիվ ինդուկցիայի կիրառումը անվերջ բազմությունների նկատմամբ անիրագործելի է: Սակայն մաթեմատիկայում հաճախ են գործ ունենում անվերջ բազմությունների հետ, և այստեղ արդյունավետ են հետազոտության այնպիսի մեթոդները, որոնք հնարավորություն են տալիս բազմության վերջավոր թվով տարրերի մասին արված դատողություններից հանգել նրա բոլոր տարրերի մասին համապատասխան դատողության: Նման մտահանգման կարևորագույն միջոց է մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը, որի շնորհիվ բոլոր բնական թվերի մասին դատողությունը բխեցվում է առանձին բնական թվերի մասին ստուգելի դատողություններից: Ասվածից հետևում է, որ թեև մեթոդը համարվում է ինդուկտիվ, բայց իրականում այն դեդուկտիվ մտահանգում է: Իսկ մեթոդը հետևյալն է.

Եթե բնական թվերի մասին ինչ-որ դատողություն ճշմարիտ է 1 թվի համար, և այն բանից, որ այն ճշմարիտ է կամայական n բնական թվի համար, հետևում է նրա ճշմարտությունը $n + 1$ բնական թվի համար, ապա այդ դատողությունը ճշմարիտ է բոլոր բնական թվերի համար:

Այսպիսով, մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով բոլոր բնական թվերի համար ինչ-որ P հատկության իրավացիությունը ցույց տալը իրականացվում է հետևյալ ճանապարհով: Նախապես պայմանավորվենք n բնական թվի նկատմամբ P հատկության կիրառման արդյունքում ստացված դատողությունը գրառել $P(n)$ տեսքով: Այսպիսով, $P(n)$ -ը կարող է լինել ճշմարիտ կամ կեղծ:

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով կամայական n բնական թվի համար $P(n)$ -ի ապացուցումը հանգում է հետևյալին.

ա. Ապացուցում ենք, որ 1 թիվը օժտված է P հատկությամբ, այսինքն՝ $P(1)$ -ը ճշմարիտ է: Ապացուցման այս քայլը կոչվում է ինդուկցիայի բազիս կամ հիմք:

բ. Ապացուցում ենք, որ կամայական n բնական թվի համար իրավացի է «եթե $P(n)$, ապա $P(n + 1)$ » հետևությունը: Այս քայլն էլ կոչվում է ինդուկցիոն քայլ:

Այս երկու քայլերի ապացուցումից հետո մենք կարող ենք եզրականացնել, որ $P(n)$ -ը ճշմարիտ է բոլոր n բնական թվերի համար: (Այդ եզրակացությունը կոչվում է ինդուկցիոն եզրակացություն:)

Մաթեմատիկայի լեզվով ինդուկցիայի մեթոդը կարելի է կարճ գրառել հետևյալ բանաձևով.

$$P(1) \& \forall n \in N (P(n) \rightarrow P(n + 1)) \rightarrow \forall n \in N (P(n)) :$$

Մեթոդի արդյունավետությունը կայանում է նրանում, որ թեպետ և մենք չենք կարող ինչ-որ հատկության իրավացիությունը ստուգել բոլոր բնական թվերի համար (քանի որ բնական թվերի բազմությունը անվերջ է), այնուամենայնիվ, մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդի միջոցով կարող ենք հատկությունը իրավացի համարել բոլոր բնական թվերի համար:

Մյուս կողմից, այստեղ առկա է $P(1)$ -ը ճշմարիտ է ըստ պայմանի ինդուկտիվ դատողությունը և հետևյալ դեդուկտիվ դատողությունները. $P(2)$ -ը ճշմարիտ է, քանի որ $P(1)$ -ի ճշմարիտ լինելուց հետևում է $P(2)$ -ի ճշմարտությունը, $P(3)$ -ը ճշմարիտ է, քանի որ $P(2)$ -ի ճշմարիտ լինելուց հետևում է $P(3)$ -ի ճշմարտությունը: Նույն կերպ ճշմարիտ են նաև $P(4)$,

P(5), ... դատողությունները: Սակայն այս գործընթացը մենք չենք կարող անվերջ շարունակել, և դատողությունների բերված շղթան չի կարող մեզ ցանկալի արդյունքի հասցնել՝ թույլ տալ կատարելու ինդուկտիվ եզրակացությունը: Եվ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդի գրավչությունը կայանում է նրանում, որ այն դեդուկտիվ դատողությունների անսահմանափակ և ոչ արդյունավետ այդ շղթան փոխարինում է մեկ դեդուկտիվ դատողությամբ, որն ունի ընդամենը երկու նախադրյալ՝ ինդուկցիայի բազիսը և ինդուկցիոն քայլը, և մեկ եզրակացություն, որը և մեր ինդուկտիվ եզրակացությունն է: Ասվածը ցույց է տալիս, որ մաթեմատիկական ինդուկցիայում առաջին հերթին դրսևորվում են գիտական գեղեցիկի՝ տրամաբանական խստության և բարդը պարզին հանգեցնելու հատկանիշները:

Անշուշտ, մեծ է մաթեմատիկական ինդուկցիայի դերը մաթեմատիկական գործունեության իրականացման մեջ: Սակայն հանրակրթության բովանդակության մեջ նրա ներառման հարցի վերաբերյալ միասնական կարծիք չկա: Միջին դպրոցում մաթեմատիկական ինդուկցիայի ուսուցումը նպատակահարմար չէ կատարել, քանի որ նրա ընկալումը վեր է սովորողների ուժերից: Իսկ ավագ դպրոցում նյութի շարադրանքը ընկալելի դարձնելու համար անհրաժեշտ է ցուցաբերել մեթոդական որոշակի հմտություն, ինչին հաճախ չեն տիրապետում ինչպես ուսուցիչների ճշնոդ մեծամասնությունը, այնպես էլ դասագրքերի որոշ հեղինակներ:

Այնուամենայնիվ, մեզ թվում է, որ ավագ դպրոցում՝ ինդուկտիվ մեթոդի առկայության և կիրառման շնորհիվ, սովորողը հնարավորություն է ստանում նորովի նայել ապացուցման գաղափարի վրա, քննադատաբար գնահատել միջին դպրոցում իրեն որպես ապացուցում ներկայացրած շատ դատողություններ, տեսնել դրանց թերությունները, անկատարությունը, հասկանալ ինչ է ճշմարտության բացահայտմանն ուղղված գիտական ապացուցումը և ապացուցման մեթոդը: Նման թեմաներ բավականին շատ են միջին դպրոցի հանրահաշվի դասընթացում: Բավական է նշել թվաբանական և երկրաչափական պրոգրեսիաներին վերաբերող զանազան թեորեմներ, որոնց ապացուցումները միջին դպրոցում իրականացվում են թերի ինդուկցիայի միջոցով:

Նման մոտեցման համար հիմք է ծառայում նաև ավագ դպրոցում միջին դպրոցի հանրահաշվի ուսումնական առարկային փոխարինած «Հանրահաշիվ և մաթանալիզի տարրերը» ուսումնական առարկան: Շատ հաճախ այստեղի ծրագրային նյութը, ըստ էության, հեռու է բուն հանրա-

հաշվից: Այնինչ, այն պետք է ներառի միջին դպրոցում ընդգրկված մի շարք թեմաներ՝ նորովի, ապացուցման նոր մեթոդների (հիմնականում՝ մաթեմատիկական ինդուկցիայի) կիրառումով, ապահովելով ուսուցման գիտականության դիդակտիկական սկզբունքը, մաթեմատիկական ապացույցին հաղորդելով տրամաբանական խստություն, ձևերի բազմազանություն և այլ հատկանիշներ, հատկանիշներ, որոնք ապահովում են նաև մաթեմատիկական ապացույցի գեղագիտական գրավչությունը:

Այսպես, օրինակ, միջին դպրոցում ցույց է տրվում, որ թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարը որոշվում է $S_n = n(n+1)/2$ բանաձևով: Այնտեղ բերված ապացուցումը կատարվում է ինտուիտիվ կամ թերի ինդուկցիայի մակարդակով և հեռու է տրամաբանական խստությունից: Ավագ դպրոցում, արդեն, սովորողները ծանոթ են մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդին և կարող են ապացուցումը կատարել այդ մեթոդով:

Ինչպես նշվեց, մաթեմատիկական ինդուկցիայի գեղագիտական գրավչությունը արտահայտվում է առաջին հերթին նրա տրամաբանական խստության մեջ: Սակայն մաթեմատիկական ինդուկցիայի գեղագիտական ներուժը պայմանավորված է կարգի հետ նրա սերտ կապով: Իրականում հենց կարգը, ավելի ճշգրիտ՝ կարգի լավագույն տեսակը՝ լիովին կարգավորվածության գաղափարն է ընկած մաթեմատիկական ինդուկցիայի հիմքում: Չսորանալով կարգի և լիովին կարգավորված բազմության և դրա հիման վրա մաթեմատիկական ինդուկցիայի ընդհանրացման՝ այսպես կոչված՝ տրանսֆինիտ ինդուկցիայի հասկացություններին առնչվող մանրամասների մեջ՝ կանգ առնենք միայն բնական թվերի համապատասխան օրինակի վրա:

Դիտարկենք, օրինակ, բնական թվերի բազմության վրա տրված փոքր լինելու կարգը: Այդ կարգը գծային է, այսինքն՝ կամայական երկու բնական թվեր կամ իրար հավասար են, կամ առաջինն է փոքր երկրորդից, կամ էլ երկրորդն է փոքր առաջինից: Այնուհետև, այդ գծային կարգի նկատմամբ բնական թվերի բազմությունը նաև լիովին կարգավորված է, այսինքն՝ բնական թվերի կամայական ոչ դատարկ ենթաբազմություն ունի ամենափոքր տարրը: Իսկ դա նշանակում է, որ այդ ենթաբազմության մեջ գոյություն ունի մեկ այնպիսի տարր, որը փոքր է նրա մնացած բոլոր տարրերից: Այս վերջին փաստի ապացուցումը չի ներառվում մաթեմատիկայի դպրոցական ծրագրերում: (Բայց դա չի խանգարում, որ մենք օգտվենք նրա առկայությունից ինդուկցիայի գեղագիտական գրավչու-

թյունը տեսնելու համար): Այժմ, հենվելով այդ փաստի վրա, ապացուցենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի օրինականությունը: Այսինքն, ցույց տանք, որ եթե բնական թվերի վերաբերյալ որևէ $P(n)$ դատողություն ճշմարիտ է 1-ի համար, և այն բանից, որ n բնական թվի համար $P(n)$ -ի ճշմարիտ լինելուց հետևում է $P(n+1)$ -ի ճշմարտությունը, ապա բոլոր բնական թվերի համար $P(n)$ -ը ճշմարիտ է:

Իսկապես, նշանակենք M -ով բոլոր այն n բնական թվերի բազմությունը, որոնց համար $P(n)$ -ը ճշմարիտ չէ: Եթե M -ը դատարկ չէ, ապա նրանում գոյություն ունի ամենափոքր տարրը. դիցուք այն a -ն է, այսինքն՝ a -ն ամենափոքր տարրն է, որի համար $P(a)$ -ն ճշմարիտ չէ: Պարզ է, որ $a > 1$, քանի որ ըստ պայմանի $P(1)$ -ը ճշմարիտ է: Բայց այդ դեպքում $a - 1$ -ը բնական թիվ է և a -ից փոքր է, և, ուրեմն, չի պատկանում M -ին, այսինքն, $P(a-1)$ -ը ճշմարիտ է: Բայց, համաձայն ինդուկտիվ ենթադրության, $P(a-1)$ -ի ճշմարիտ լինելուց հետևում է $P(a)$ -ի ճշմարտությունը: Ստացվեց հակասություն այն պնդման հետ, որ $P(a)$ -ն ճշմարիտ չէր: Հակասությունը բխեց այնտեղից, որ մենք ենթադրեցինք, որ M -ը դատարկ չէ: Հետևաբար այն, այսինքն՝ բոլոր այն n բնական թվերի բազմությունը, որոնց համար $P(n)$ -ը ճշմարիտ չէ, դատարկ է: Ուրեմն, $P(n)$ դատողությունը ճշմարիտ է բոլոր n բնական թվերի համար:

Խոսելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի գեղագիտական գրավչության մասին, պետք է նկատի ունենալ նրանում գիտական գեղեցիկի ինքնատիպության, ընդհանրականության, հստակության, պարզության, տրամաբանական խստության հատկանիշների առկայությունը, այլև նրա հիմնավորումը փաստող այս ապացուցման մեջ կարգի՝ բնական թվերի կարգավորվածության հիմնարար նշանակությունը:

Ցուցադրենք մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում ինդուկտիվ և դեդուկտիվ մեթոդների և նրանցում գեղագիտական տարրի դրսևորման մեկ օրինակ: Դիցուք պահանջվում է գտնել առաջին n կենտ բնական թվերի գումարը: Նշանակենք այն $S(n)$ -ով: Բնական կլինի դիմել ինդուկցիոն մեթոդին և գտնել այդ գումարը նախ 1, 2, 3, 4 թվերի համար: Պարզագույն հաշվումները ցույց են տալիս, որ

$$S(1) = 1, S(2) = 4, S(3) = 9, S(4) = 16:$$

Այս չորս քայլը հավանաբար արդեն բավարար է, որ մենք նկատենք հետևյալ օրինաչափությունը. յուրաքանչյուր հավասարության աջ մասում ստացված թիվը այն n թվի քառակուսին է, որի համար հաշվում ենք

համապատասխան $S(n)$ գումարը: Այս օրինաչափությունը մեզ անմիջապես մղում է $S(n) = n^2$ վարկածի կամ ինդուկցիոն ենթադրության առաջադրմանը, որի ապացուցումը պետք է փորձել կատարել մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով:

Ինդուկցիայի բազիսը. $n = 1$ թվի համար ինդուկցիոն ենթադրությունը ճշմարիտ է, քանի որ $S(1) = 1^2$:

Ինդուկցիոն քայլը. Դիցուք ճշմարիտ է $S(n) = n^2$ բանաձևը: Ցույց տանք, որ այդ դեպքում ճշմարիտ կլինի նաև $S(n+1) = (n+1)^2$ բանաձևը: Իսկապես.

$$S(n+1) = S(n) + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2, S(n+1) = (n+1)^2:$$

Նույն բանաձևը կարելի էր ստանալ և ապացուցել նաև դեդուկցիայի մեթոդով՝ կենտ թվերի հաջորդականությունը դիտարկելով որպես թվաբանական պրոգրեսիա: Սակայն այս դեպքում մեզ անհրաժեշտ էր նախապես իմանալ $a_1, a_2, \dots, a_n$ թվաբանական պրոգրեսիայի գումարի $S(n) = n(a_1 + a_n)/2$ բանաձևը և նկատել, որ կենտ թվերի հաջորդականությունը իսկապես կազմում է թվաբանական պրոգրեսիա: Կիրառելով դեդուկցիայի մեթոդը, կստանանք՝

$$S(n) = n(a_1 + a_n)/2 = n(1 + (2n+1))/2 = n^2, S(n) = n^2:$$

Գիտական գեղեցիկի այլ հատկանիշների ընդհանրության պայմաններում, լուծման առաջին մեթոդում գերիշխում է գիտական գեղեցիկի՝ ինտելեկտուալ որոնման, զտնելու, հայտնագործելու սուբյեկտիվ հատկանիշները, իսկ երկրորդում՝ բազմազանությունների միասնության օբյեկտիվ հատկանիշը: